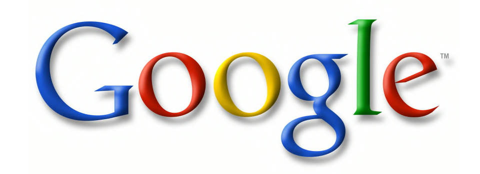


This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

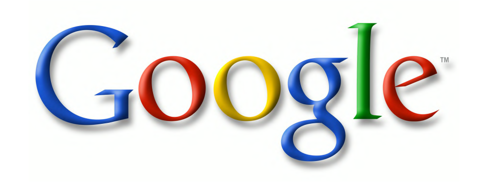
Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`



A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

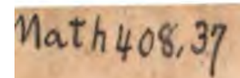
Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.
+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.
+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.
+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

th 408.37





Harvard College Library

FROM THE BEQUEST OF

HORACE APPLETON HAVEN,

OF PORTSMOUTH, N. H.

(Class of 1842.)

27 August, 1901.

TRAITÉ COMPLET

DES

CARRÉS MAGIQUES

SIMPLES ET COMPOSÉS.

DIJON,

IMPRIMERIE, FONDERIE ET LITHOGRAPHIE DE DOUILLIER.

TRAITÉ COMPLET

DES

CARRÉS MAGIQUES

PAIRS ET IMPAIRS,

SIMPLES ET COMPOSÉS, A BORDURES, COMPARTIMENS, CROIX, CHASSIS, ÉQUERRES, BANDES DÉTACHÉES, ETC.;

SUIVI

D'UN TRAITÉ DES CUBES MAGIQUES,

DE LA

THÉORIE DES PARALLÉLOGRAMMES ET PARALLÉLIPIPÈDES MAGIQUES,

ET D'UN

ESSAI SUR LES CERCLES MAGIQUES;

PAR B. VIOLLE, GÉOMÈTRE,

CHEVALIER DE SAINT-LOUIS.

AVEC ATLAS DE 54 GRANDES FEUILLES, COMPRENANT 400 FIGURES.

TOME II.

A PARIS,

CHEZ BACHELIER, LIBRAIRE, QUAI DES AUGUSTINS.

A DIJON,

CHEZ { L'AUTEUR, RUE CHABOT-CHARNI, COUR DE L'ANCIEN ÉVÊCHÉ;
DOUILLIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE, RUE DES GODRANS.

1838.

Math 408.37

AUG 27 1901
LIBRARY

Haven fund



TROISIÈME PARTIE.

VARIATIONS DES CARRÉS;
CROIX;
CHASSIS; CASES DÉTERMINÉES;
FAUSSES BORDURES; ÉQUERRES;
PROGRESSIONS GÉOMÉTRIQUES ET HARMONIQUES;
CUBES MAGIQUES, ETC., ETC.

§ 1.er

VARIATIONS DANS LES CARRÉS MAGIQUES.

Lorsqu'un carré est fait, il peut être susceptible d'une foule de variations sans cesser d'être magique. C'est particulièrement le carré de 4 de-racine que l'on va examiner, attendu que c'est celui qui revient le plus souvent. Il ser-

vira d'exemple pour les variations qui peuvent avoir lieu dans les carrés dont la racine est plus élevée.

Soient les deux tableaux :

1	2	3	4		0	4	8	12
4	3	2	1		8	12	0	4
4	3	2	1		4	0	12	8
1	2	3	4		12	8	4	0

On a dit qu'un quadrille consiste en quatre nombres symétriquement placés, et dont la somme est égale à celle de l'une des lignes du carré.

Si l'on fait attention aux tableaux ci-dessus, on verra que les deux premières horizontales donnent 6 quadrilles, savoir : les 4 nombres des angles de gauche ; les 4 nombres des angles de droite ; les 4 nombres du milieu : ces trois quadrilles sont disposés en carré ; plus les 4 nombres des 1.re et 3.e verticales ; ceux des 2.e et 4.e verticale ; enfin ceux des 1.re et 4.e verticales. Ces trois derniers quadrilles sont disposés en parallélogramme. Les deux dernières horizontales en auront également 6 disposés comme ci-dessus ; les deux horizontales du milieu n'en auront que 2, savoir : les 4 angles, ce qui donne un parallélogramme ; et les 4 nombres du milieu, disposés en carré. La première et la dernière horizontale en ont aussi deux, savoir : les 4 angles disposés en carré, et les 4 du milieu en parallélogramme. La 1.re et la 3.e en donnent 6, savoir : les 4 angles de gauche, les 4 nombres du milieu, et les 4 angles de droite : ces trois quadrilles sont des parallélogrammes ; ensuite les 4 angles des 1.re et 3.e verticales, les 4 angles des 2.e et 4.e verticales, enfin les 4 angles des deux hori-

zontales : ces 3 quadrilles sont des carrés. Les 2.e et 4.e horizontales en ont également 6, dont 3 carrés et 3 parallélogrammes. Voilà pour le premier tableau : en tout, 14 carrés, et autant de parallélogrammes.

Quant au 2.e tableau, les deux premières horizontales donneront 4 quadrilles, dont un parallélogramme et trois carrés; les deux dernières de même; celles du milieu en auront 6, dont 3 carrés et 3 parallélogrammes; les première et dernière en auront 6, dont 5 parallélogrammes et un carré; les première et troisième ont 4 quadrilles, dont 2 carrés et 2 parallélogrammes. Il en est de même des 2.e et 4.e : en tout, 28, *dont 14 carrés et 14* parallélogrammes.

Les quadrilles d'un tableau ne répondent pas toujours aux mêmes quadrilles de l'autre tableau.

Lorsqu'un quadrille se partage en deux parties, chacune de deux nombres de même somme égale à un couple (ici c'est 17), cela donne lieu à une foule de variations que l'on va présenter.

On prendra pour type le carré résultant des tableaux ci-dessus; l'on y joindra les différences :

1	6	11	16	7,5+2,5—2,5—7,5
12	15	2	5	—3,5—6,5+6,5+3,5
8	3	14	9	+0,5+5,5—5,5—0,5
13	10	7	4	—4,5—1,5+1,5+4,5

Ces différences sont remarquables par la répétition, à chaque horizontale, des mêmes différences en plus et en moins, et symétriquement disposées, comme on le voit ici. C'est sur ce carré-type qu'on va opérer les change-

mens. Le carré des différences est utile à consulter, pour ne pas faire de fausses mutations.

PREMIERS CHANGEMENS.

1	10	7	16	1	6	11	16	1	10	7	16
12	15	2	5	8	15	2	9	8	15	2	9
8	3	14	9	12	3	14	5	12	3	14	5
13	6	11	4	13	10	7	4	13	6	11	4

On tire de ces premiers changemens, et toujours à l'aide des différences, les autres changemens.

SECONDS CHANGEMENS.

1	6	11	16	6	1	16	11	6	1	16	11
12	15	2	5	15	12	5	2	15	12	5	2
14	9	8	3	9	14	3	8	3	8	9	14
7	4	13	10	4	7	10	13	10	13	4	7

TROISIÈMES CHANGEMENS.

1	6	11	16	6	1	16	11
15	12	5	2	12	15	2	5
8	3	14	9	3	8	9	14
10	13	4	7	13	10	7	4

QUATRIÈMES CHANGEMENS.

1	11	6	16	1	7	10	16	1	11	6	16	1	7	10	16
12	14	3	5	12	14	3	5	8	14	3	9	8	14	3	9
8	2	15	9	8	2	15	9	12	2	15	5	12	2	15	5
13	7	10	4	13	11	6	4	13	7	10	4	13	11	6	4

Voilà les changemens dont le carré-type est susceptible; mais ces nouveaux carrés peuvent eux-mêmes supporter

partie de ces mêmes changemens, devenant types à leur tour. Ainsi

Le 1.er carré du 2.e changement aura les premiers et quatrièmes.

Le 2.e carré du même changement aura les premiers, troisièmes et quatrièmes.

Le 3.e carré, toujours du 2.e changement, aura les premiers et quatrièmes.

Les deux carrés du 3.e changement auront aussi les premiers et quatrièmes.

Maintenant que les *angles des diagonales* remplacent les *cases du milieu*, et réciproquement, il viendra le type

15	12	5	2
6	1	16	11
10	13	4	7
3	8	9	14

Ce type aura les quatre genres de changemens que l'on a donnés, en suivant le même ordre; et lorsqu'on aura obtenu ces variations, il viendra, pour chacun des carrés des deuxièmes et troisièmes changemens, d'autres variations, comme ci-dessus, pour le type primitif.

On peut en obtenir davantage: par exemple, le 3.e carré du premier changement aura les deuxièmes et troisièmes; il en sera de même du 2.e carré du 4.e changement.

Il peut se faire qu'en traitant un nouveau type, on retombe sur des variations déjà obtenues; il faut les mettre de côté; mais avec un peu d'attention on peut éviter ces doubles emplois.

Il y a pour d'autres carrés pairs des changemens analogues.

Voici le carré de 8, d'après la méthode expéditive, et les différences :

1	63	3	61	60	6	58	8
56	10	54	12	13	51	15	49
17	47	19	45	44	22	42	24
40	26	38	28	29	35	31	33
32	34	30	36	37	27	39	25
41	23	43	21	20	46	18	48
16	50	14	52	53	11	55	9
57	7	59	5	4	62	2	64

+31,5	—30,5	+29,5	—28,5	—27,5	+26,5	—25,5	+24,5
—23,5	+22,5	—21,5	+20,5	+19,5	—18,5	+17,5	—16,5
+15,5	—14,5	+13,5	—12,5	—11,5	+10,5	— 9,5	+ 8,5
— 7,5	+ 6,5	— 5,5	+ 4,5	+ 3,5	— 2,5	+ 1,5	— 0,5
+ 0,5	— 1,5	+ 2,5	— 3,5	— 4,5	+ 5,5	— 6,5	+ 7,5
— 8,5	+ 9,5	—10,5	+11,5	+12,5	—13,5	+14,5	—15,5
+16,5	—17,5	+18,5	—19,5	—20,5	+21,5	—22,5	+23,5
—24,5	+25,5	—26,5	+27,5	+28,5	—29,5	+30,5	—31,5

Le carré des différences est remarquable : les mêmes différences, ne différant que par le signe, sont symétriquement placées par rapport au centre de ce carré : de là une foule de changemens. Ainsi 25,5—26,5, différant d'une unité en moins, peuvent remplacer—30,5+ 29,5, ces différences restant dans les mêmes horizontales ; ou, dans le carré des nombres, 7 et 59 se mettront au lieu de 63, 3. Il en est de même de 62, 2, au lieu de 6, 58, et aussi de 56, 17 pour 49, 24, de 41, 16 pour 48, 9. On peut aussi chan-

ger les angles 57, 64 pour 1, 8, mais en même temps 5, 4 pour 61, 60; par conséquent la dernière verticale entière au lieu de la première, et la première horizontale pour la dernière. On peut changer 50 et 14 pour 10, 54, si l'on change en même temps 11, 55 pour 51, 15 : car alors les deux diagonales, altérées par un des changemens, sont rectifiées par l'autre.

Une foule de changemens auront lieu, indépendamment de ceux indiqués ci-dessus : c'est aux différences surtout à les indiquer.

Il est aisé de se convaincre que les carrés impairs ne se prêtent pas à ce genre de variations.

§ 2.

FORMES DES CARRÉS.

On n'examinera que les formes simples, les variétés n'en feront pas partie : ainsi, lorsqu'on dira que, dans un carré à compartimens, les carrés partiels ont deux bordures, on supposera qu'ils ont tous ces deux bordures; les variétés seraient bordure simple à quelques-uns, ou absence de bordure à quelques autres; mais dans le cas actuel il est toujours indispensable qu'il y ait des carrés à deux bordures.

Examinant d'abord les carrés impairs,

La racine 3 n'a qu'une forme.

5 en a 2, le carré simple et le carré avec bordure.

7 en a 3 : car le carré est simple, et avec une ou deux bordures.

9 en aura 5, étant simple, et avec une, 2, 3 bordures, ou par 9 carrés de 9 cases.

11 en a 6, simple et avec bordure, les 5 de 9.

13 en a 7, simple et avec bordure, les 6 de 11.

15 en aura 11, simple et avec bordure, les formes de 13; mais 15=3.5 : donc on peut avoir 25 carrés de 9 cases, ou 9 carrés de 25 cases, avec ou sans bordure.

17 en aura 12, simple et avec bordure, les 11 formes de 15.

19 aura 13 formes.

21 en aura 18, savoir : simple et avec une bordure, celles de 19, ce qui fait 14; mais 21=3.7: donc 49 carrés de 9 cases, ou 9 carrés de 7, ce qui donne les 3 formes de 7.

23 en aura 19 : en général les nombres premiers n'ont qu'une forme de plus que l'impair précédent.

25 en aura d'abord 20, étant simple ou avec bordure, ayant les formes de 23; mais 25=5.5 : on peut donc faire 25 carrés de 5 avec ou sans bordure, ce qui donnera en tout 22.

27 aura d'abord 23 formes, savoir : simple et avec bordure, celles de 25; mais 27=3.3.3 : on peut donc avoir 9 carrés de 9, ou 81 carrés de 3 : or le carré de 9 donne 5 formes : on aura donc en tout 29.

29 en aura 30.

31 en aura 31.

33 aura d'abord 32 formes; mais 33=3.11 : d'où 9 carrés de 11, ce qui fournit 6 formes, et 121 carrés de 3: en tout, 39.

35 aura d'abord 40 formes; mais 35=5.7 : on aura donc

25 carrés de 7, ou 3 formes, et 49 carrés de 5 ou 2 formes; en tout 45.

37 en aura 46.

39 en aura d'abord 47; mais $39=3\cdot13$. Il viendra donc 9 carrés de 13, ou 7 formes, ou 169 carrés de 3: en tout 55 formes.

41 en aura 56.

43 en aura 57.

45 aura d'abord 58 formes; mais $45=3\cdot3\cdot5$: ce qui donnerait 9 carrés de 15, ou 11 formes; 81 carrés de 5, ou 2 formes; 225 carrés de 3; enfin 25 carrés de 9, ou 5 formes. Total 77 formes.

Et ainsi de suite.

Passant aux racines paires,

On a dit que, si i est un nombre impair, on ne pouvait avoir ni 4 carrés de i^2, ni i^2 carrés de 4: en effet ce dernier cas n'est jamais possible, puisque le carré de 2 ne peut s'arranger magiquement. Quant au premier cas, soit la racine $2i$, et la progression $1\cdot2\cdot3\ldots.4i^2$: la somme sera $(4i^2+1)\frac{4i^2}{2}=8i^4+2i^2=2(4i^4+i^2)$: or i^4 est impair; mais $4i^4$ est pair; et, comme i^2 est impair, il suit que $4i^4+i^2$ est impair: donc $2\,(4i^4+2i^2)$ ne peut se diviser par 4, et se divise par 2 seulement: donc on ne peut avoir 4 carrés égaux. Mais si la racine est seulement $2\cdot2i$, la progression étant $1\cdot2\cdot3\ldots4\cdot4i^2$, la somme deviendra $(16i^2+1)\frac{16i^2}{2}=8\cdot16i^4+8i^2=8\,(16i^4+i^2)$, nombre divisible par 4, et qui donne pour quotient $2\,(16i^4+i^2)$. La parenthèse est impaire, mais le quotient est pair: on pourra donc avoir 4 carrés égaux en prenant pour chacun autant de petits nombres que de complémens.

Voici les formes simples pour les 40 premiers nombres pairs :

Le carré de 2 n'est pas possible.

4 de racine n'a qu'une forme.

6=2·3 ne donne rien par cette décomposition : il n'aura que deux formes, simple et avec bordure.

8=2·4 sera simple et avec bordure, aura les deux formes de 6, et de plus 4 carrés de 4 : donc en tout 4 formes.

10=2·5 ne fournit rien par cette décomposition : il n'aura donc que 5 formes, savoir : simple, et avec bordure, celles de 8.

12=2·2·3 donnera 2·6 et 3·4. Il aura donc, 1.° forme simple ; 2.° 4 carrés de 6, ou 2 formes ; 3.° 9 carrés de 16 cases ; 4.° 16 carrés de 9 cases ; 5.° enfin, avec une bordure, les 5 formes de 10 : en tout 10 formes.

14=2·7 n'aura que 11 formes.

16=4·4=2·8 aura, 1.° forme simple ; 2.° avec une bordure, les 11 formes de 14 ; 3.° 4 carrés de 8, ou 4 formes ; 4.° 16 carrés de 4 : total, 17 formes.

18=2·9=3·6 aura, 1.° forme simple ; 2.° avec bordure, les 17 formes de 16 ; 3.° 9 carrés de 6, ou 2 formes ; 4.° 36 carrés de 3 : total, 21 formes.

20=2·10=4·5 aura, 1.° forme simple ; 2.° avec bordure celles de 18, ou 21 formes ; 3.° 4 carrés de 10, ou 5 formes ; 4.° 16 carrés de 5, ou 2 formes ; 5.° 25 carrés de 4 : total, 30 formes.

22=2·11 aura 31 formes.

24=2·12=3·8=4·6 aura, 1.° forme simple ; 2.° avec bordure, les 31 formes de 22 ; 3.° 4 carrés de 12, ou 10 formes ; 4.° 9 carrés de 8, ou 4 formes ; 5.° 64 carrés

de 3 ; 6.° 16 carrés de 6, ou 2 formes; 7.° 36 carrés de 4 : en tout 50 formes.

26=2·13 aura 51 formes.

28=2·14=4·7 aura, 1.° forme simple; 2.° avec bordure, les 51 formes de 26 ; 3.° 4 carrés de 14, ou 11 formes; 4.° 16 carrés de 7, ou 3 formes; 5.° 49 carrés de 4 : total, 67 formes.

30=2·15=3·10=5·6 ne donne rien pour la décomposition 2·15; mais il aura, 1.° forme simple; 2.° avec une bordure, les 67 de 28; 3.° 9 carrés de 10, ou 5 formes; 4.° 100 carrés de 3; 5.° 25 carrés de 6, ou 2 formes; 6.° 36 carrés de 5, ou 2 formes : total, 78 formes.

32=2·16=4·8 aura, 1.° forme simple; 2.° avec bordure, les 78 formes de 30; 3.° 4 carrés de 16, ou 17 formes; 4.° 16 carrés de 8, ou 4 formes; 5.° 64 carrés de 4 : total, 101 formes.

34=2·17 n'aura que 102 formes, la décomposition ne produisant rien.

36=2·18=3·12=4·9=6·6 aura, 1.° forme simple; 2.° avec une bordure, les 102 formes de 34; 3.° 4 carrés de 18, ou 21 formes; 4.° 9 carrés de 12, ou 10 formes; 5.° 144 carrés de 3; 6.° 16 carrés de 9, ou 5 formes; 7.° 81 carrés de 4; 8.° 36 carrés de 6, ou 2 formes : total, 143 formes.

38=2·19, n'a que 144 formes.

40=2·20=4·10=5·8 aura, 1.° forme simple ; 2.° avec une bordure, les formes de 38, ou 144 formes; 3.° 4 carrés de 20, ou 30 formes; 4.° 16 carrés de 10, ou 5 formes; 5.° 100 carrés de 4; 6.° 25 carrés de 8, ou 4 formes; 7.° 64 carrés de 5, ou 2 formes; total, 187 formes.

On voit que le nombre des formes simples, lorsque la racine est paire, croît beaucoup plus rapidement que pour les racines impaires.

Il est utile de mettre sur la voie relativement aux formes variées dont est susceptible une forme simple. Deux exemples suffiront :

Soit prise pour les nombres impairs la forme simple de 9 carrés de 11. Puisque le carré de 11 a 6 formes, il est aisé d'établir les calculs. Ces 6 formes sont le carré de 11 simple, le carré avec 4 bordures, avec 3 bordures, avec 2 bordures, avec une bordure, et le carré simple de 9; enfin avec une bordure et 9 carrés de 9 cases.

Maintenant, les 9 carrés de 11 peuvent être uniformes, ce qui donnera 6 formes particulières.

Si l'on n'a que 2 des 6 formes du carré de 11, il ne peut arriver que quatre cas, savoir : un d'une forme, et 8 d'une autre, 2 et 7, 3 et 6, enfin 4 et 5.

S'il y a des carrés de 3 formes, ils sont les suivans: 1, 1, 7... 1, 2, 6... 1, 3, 5... 1, 4, 4... 2, 2, 5... 2, 3, 4... 3, 3, 3; ce qui donne 7 cas.

Pour les carrés de 4 formes il viendra 1, 1, 1, 6.... 1, 1, 2, 5... 1, 1, 3, 4... 1, 2, 2, 4... 1, 2, 3, 3... 2, 2, 2, 3: en tout 6 cas.

Pour les carrés de 5 formes, 1, 1, 1, 1, 5...1, 1, 1, 2, 4... 1, 1, 1, 3, 3... 1, 1, 2, 2, 3... 1, 2, 2, 2, 2: total, 5 cas.

Pour les carrés de 6 formes on ne peut avoir que 1, 1, 1, 1, 1, 4... 1, 1, 1, 1, 2, 3... 1, 1, 1, 2, 2, 2: en tout 3 cas.

Les chiffres, pour chaque cas, indiquent ce qu'on peut prendre de chaque espèce de carré : ainsi 1, 1, 1, 2, 4 dé-

signe que sur 5 espèces de carrés il y en a 3 dont on ne prend qu'un carré; une autre dont il y aura 2 carrés, et une cinquième dont il entrera 4 carrés sur les 9 dont il s'agit.

Si l'on n'a que deux espèces de carré, dont un d'une forme, et 8 d'une autre, le 1.er pourra occuper l'une des 9 places à volonté; mais chacune des 5 formes différentes de celle qu'affecte le carré unique choisi, peut occuper les 8 places restantes : donc on aura 9·5; et, comme chacune des 6 formes peut être celle du carré en question, on aura enfin 9·5·6.

Pour le cas de 2 carrés d'une espèce et 7 d'une autre, les 2 premiers auront dans les 9 carrés, ÷ 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 = 9·4 = 36 positions qu'il faut toujours multiplier par 5·6 : donc ici 36·5·6.

S'il y a 3 carrés d'une espèce et 6 d'une autre, on aura successivement 28, 21, 15, 10, 6, 3, 1 = 84 = somme des 7 premiers nombres triangulaires, laquelle sera toujours multipliée par 5·6 : donc ici 84·5·6.

Enfin le 4.e cas, de 4 carrés d'une espèce et 5 d'une autre, donne successivement 21, 15, 10, 6, 3, 1 = 56; puis 15, 10, 6, 3, 1 = 35; ensuite 10, 6, 3, 1 = 20; puis 10, puis 4, puis enfin 1 : or la série 1, 4, 10, 20, 35, 56, est celle des nombres pyramidaux triangulaires, dont la somme est $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}$; ici $n = 6$: donc $\frac{6\cdot7\cdot8\cdot9}{2\cdot3\cdot4} = 126$ à multiplier par 5·6 : ainsi 126·5·6.

Soit l'un des cas où l'on a des carrés de 3 formes, et soit ce cas celui où il faut un carré d'une forme, 4 carrés d'une seconde, et 4 carrés d'une troisième. D'abord, puisque huit lettres combinées entr'elles donnent 8·7·6·5

combinaisons 4 à 4, et qu'il faut diviser ce produit par 1.2.3.4, si les lettres sont égales par moitié, il vient 70 pour résultat ; mais le carré unique prend 9 positions par rapport à chaque combinaison : on aura donc 70.9. Maintenant, chacun des 6 carrés différens peut être le carré choisi : donc 7.9.6 ; mais les deux formes de carrés égaux, 4 à 4, doivent se prendre sur les 5 formes restantes : il faut donc calculer 5 lettres 2 à 2, ce qui donnera 10 : donc en tout 6.7.9.10.

On agirait de même pour les autres cas ; on aurait à sommer des nombres figurés, ce qui se fait aisément.

Pour deuxième exemple, soit pris, parmi les formes de 20, 16 carrés de 5 : comme 5 n'a que deux formes, on aurait ou les formes toutes égales, ce qui donnerait deux formes particulières ; ou bien on prendrait des deux formes de 5, savoir : 1, 15... 2, 14... 3, 13... 4, 12... 5, 11... 6, 10... 7, 9... 8, 8, ce qui donnerait 8 cas. Qu'on choisisse celui ou l'on a 3 carrés d'une façon et 13 de l'autre : il vient les nombres triangulaires 1, 3, 6, 10... 105, dont le dernier est le 14.e ; or la somme $=\frac{n(n+1)(n+2)}{2\cdot3}$; ici $n=14$: donc $\frac{14\cdot15\cdot16}{2\cdot3}=14\cdot5\cdot8=560$, qu'il faut multiplier par 2, puisque 5 n'a que deux formes : il viendra donc 1120 formes particulières.

S'il est facile de connaître les formes simples d'un carré pair ou impair lorsqu'on a les précédens, il n'est pas possible de déterminer *à priori* celles dont un carré donné est susceptible, sans recourir aux précédens carrés. Il n'y a point de formule pour résoudre ce problème.

Il faut remarquer que l'on n'a considéré, dans ce qui précède, que les carrés simples à bordures et à comparti-

mens; mais on verra, dans cette 3.e partie d'autres formes tout-à-fait différentes de celles données jusqu'à présent.

§ 3.

BORDURES FAUTIVES.

C'est à Frénicle que l'on doit cette théorie, d'avoir un carré magique avec telle ou telle bordure, et non magique avec telle ou telle autre : c'est ce qu'il appelle attachement de figures. On va voir une application au carré de 14 (*planche* XXIII, *figure* 122). Il prend pour le carré central les 16 nombres du milieu, et pour chaque enceinte les précédens et les suivans. Il suppose aussi que les carrés de 6, 8, 10, 14, sont magiques, mais non celui de 12.

On formera un tableau qui comprendra les verticales de deux bordures, dont l'une est intérieure, c'est celle qu'on veut rendre fautive; l'autre lui est immédiatement extérieure. Les angles n'entrent pas dans ce tableau, qui renfermera aux colonnes A et B les nombres des bordures, et aux colonnes C et D leurs complémens, comme on le voit ci-après. On cherche dans la colonne B deux nombres dont la somme soit égale à celle de deux nombres de la colonne A, par exemple, 40 et $152 = 3 + 189$; on transportera 40 et 152 de la colonne B à la colonne A, et dans sa ligne horizontale. On mettra ensuite 3 et 189 au lieu de 40 et 152. Quant à 15 et 186, on peut les mettre au lieu de 3 et 189; ensuite, et sans toucher à la colonne C, on mettra à la colonne D les complémens des nombres de la colonne A, soit qu'on les ait remplacés, soit qu'on les ait changés de colonne, soit qu'on n'y ait pas touché : ainsi 182 et 11,

complémens de 15 et de 186, seront en face de ces nombres; 194 et 8 seront en face et sur la même ligne que 3 et 189, dont ils sont complémens. Il suit de cette manière d'opérer, que la bordure de 14 n'est pas altérée en verticale, ni à la colonne A, ni à la colonne D. Quant aux horizontales, par exemple, celle où se trouvent 3 et 40, il est clair que les quatre nombres de cette ligne donnent deux couples : par conséquent le carré total est magique. Mais, comme 3 et 157 ne fournissent pas un couple, pas plus que 189 et 45, il suit que le carré n'est pas magique avec la bordure de 12. Voici les tableaux, l'un d'après les bordures exactes, l'autre d'après les bordures rectifiées, et celle de 12 fautive :

3			194....	15			182
189	30	167	8....	186	30	167	11
13	39	158	184....	13	39	158	184
4	44	153	193....	4	44	153	193
15	40	157	182....	40	3	157	194
185	156	41	12....	185	156	41	12
7	155	42	190....	7	155	42	190
187	154	43	10....	187	154	43	10
6	168	29	191....	6	168	29	191
186	152	45	11....	152	189	45	8
188	46	151	9....	188	46	151	9
5			192....	5			192
A	B	C	D	A	B	C	D

On ne peut vicier une bordure en changeant deux nombres d'une même horizontale : ainsi (*planche* XXIII, *figure* 123), au carré de 8, le tableau serait :

25			40
31	2	63	34
32	58	7	33
43	51	14	22
39	37	28	26
36			29

On a bien 31 + 39 = 63 + 7; mais, comme 63 est sur la ligne de 31, on ne peut remplacer les uns par les autres les nombres dont la somme est égale.

Il n'est pas nécessaire d'opérer sur les lignes que l'on a choisies au carré de 14. On peut en choisir d'autres, pourvu qu'on n'emploie pas des nombres et leurs complémens : ainsi (*planche* XXIII, *figure* 124) le carré de 9 donne le tableau

BORDURE PRIMITIVE.				BORDURE FAUTIVE.			
36			46....	36			46
56	2	80	26....	55	27	80	2
55	73	9	27....	56	73	9	26
54	64	18	28....	43	39	18	64
50	62	20	32....	54	62	20	28
43	53	29	39....	50	53	29	32
42			40....	42			40
A	B	C	D	A	B	C	D

Comme 27 et 39 de la colonne D = 64 + 2 de la colonne B, on peut mettre 27 au lieu de 2, et 39 au lieu de 64; ensuite 2 et 64 vis-à-vis 27 et 39. On ne touchera pas à la colonne C; et à la colonne A se trouveront les complémens des nombres qui étaient dans la colonne D,

soit qu'ils y restent, soit qu'ils aient changé, comme on voit au tableau ci-dessus.

Si l'on voulait vicier deux bordures de suite, on agirait sur les plus petites, et sur celle qui les enveloppe toutes deux : ainsi, pour le même carré de 14 (*pl.* XXIII, *figure* 122), si l'on veut rendre fautives les bordures de 8 et de 10, on formera les tableaux suivans de la 12.e et de la 8.e bordures, angles non compris.

39			158....	156			41
44	73	124	153....	124	73	39	158
40	78	119	157....	40	78	119	157
156	128	69	41....	69	128	154	43
155	74	123	42....	155	74	123	42
154	117	80	43....	168	117	80	29
168	122	75	29....	44	122	75	153
152			45....	152	·		45
A	B	C	D	A	B	C	D

Opérant sur les colonnes A et C, on aura 39 + 154 = 69 + 124 : on mettra donc 39 au lieu de 124, et 154 au lieu de 69; puis 124 sur la ligne de 39, et 69 sur la ligne de 154. On ne pourrait mettre 69 sur la ligne de 39, et 124 sur celle de 154 : car on ne touche pas à la colonne B, et il faut toujours que 69 réponde à 128, et 124 à 73, pour avoir des couples exacts, qui sont ici 197. Maintenant, la colonne D contiendra les complémens de la colonne A du tableau régulier, soit que les nombres de la colonne A restent encore dans cette colonne, soit qu'ils aient passé dans la colonne C, comme il a été dit, au moyen de l'opération précédente. Les verticales sont ré-

gulières; mais quant aux horizontales, il est clair que $73+39=112$ est < 197; de même $128+154=282$ est > 197 : donc la bordure est fausse; or il est évident qu'elle ne peut pas être fausse sans que celle qui la précède, et qui est régulière, ne donne un carré fautif, puisqu'on n'a pas touché à cette bordure de 10, et que le carré de 10 participe à la défectuosité de celui de 8; mais tout est rétabli dans le carré de 12, puisque les horizontales des bordures de 12 et de 8 font 2 couples, et que le carré intermédiaire de 10 est régulier : ainsi on ne vicie pas réellement deux bordures, mais deux carrés.

On aurait pu agir sur les horizontales comme sur les verticales, ce qui fournirait de nouvelles combinaisons. Ce qui vient d'être dit, suffit pour ne laisser aucun embarras lorsqu'on aura à vicier un ou plusieurs carrés à bordures: la dernière ne peut jamais être défectueuse : car le carré total ne serait plus magique; c'est-à-dire qu'elle ne peut être viciée seule, les autres étant exactes; mais elle peut l'être si la précédente, ou plusieurs jusqu'à elle, devaient être fautives, puisqu'elle les envelopperait.

La méthode de Frénicle, quelque ingénieuse qu'elle soit, n'est ni la plus facile, ni la plus directe, et il y a des arrangemens de bordures tels, que ces bordures peuvent être doubles, triples, etc.

Voici donc une manière d'opérer que n'a proposée aucun auteur. Elle est simple, facile à retenir, et commode. Elle consiste à placer les nombres qui ne couvrent pas le carré central, dans les cases symétriques, au lieu des cases opposées, à savoir, un nombre et son complément. On en va donner plusieurs exemples. Il n'est pas besoin

de dire que le carré central doit avoir au moins deux bordures dans le cas dont il s'agit.

Soit le carré de 7 à deux bordures : qu'on prenne les 9 nombres du milieu pour le carré central, et qu'on demande une double bordure ; les différences restantes sont de ± 5 à ± 24 : on formera les deux horizontales supérieures. Soient supposées ces horizontales :

La plus extérieure 24 + 23 + 22 — 21 — 20 — 19 — 9

L'intérieure. . . . . 18 + 17 + 16 — 15 — 14 — 12 — 10

Il reste les différences 5, 6, 7, 8, 11, 13.

Maintenant, la 1.re verticale doit avoir une différence de chaque horizontale avec son signe, et une autre de chacune de ces lignes avec changement de signe. La 2.e verticale sera composée de même, et l'on ne pourra disposer que de 3 des différences restantes pour les compléter.

Soit la 1.re verticale 24 + 18 — 23 — 17 — 13 + 5 + 6 : il ne reste plus que 7, 8, 11. Qu'on forme les différences de ces trois différences positivement seulement : on aura 7 + 11 + 8 = 26. . . 7 + 8 — 11 = 4. . . 7 + 11 — 8 = 10. . . 8 + 11 — 7 = 12.

Il faut prendre 4 différences parmi celles des horizontales, et qui n'ont pas été employées dans la 1.re verticale, de sorte que la somme de ces 4 différences, dont une de chaque horizontale avec son signe, et une autre avec signe contraire, soit égale à ± 26, ± 4, ± 10, ± 12. Or — 21 — 15 + 20 + 12 = — 4 : ainsi la 2.e verticale serait — 21 — 15 + 20 + 12 + 7 + 8 — 11.

On aurait pu avoir encore + 22 + 19 — 15 — 16 = 10. . . + 22 + 20 — 16 — 14 = 12. . . 21 — 9 + 10 — 12 = 10. . . 22 + 9 + 10 — 15 = 26.

Dans la formation des bordures chacune se construit à part. On voit qu'ici elles se construisent cumulativement.

Voici maintenant la manière de distribuer ces différences, et c'est seulement à cette manière qu'on est redevable de la méthode pour obtenir des bordures doubles, triples, etc.

Les différences communes remplissent les 4 cases angulaires, et leurs complémens se placent symétriquement, et non en opposition, comme cela se pratique pour les bordures ordinaires; les différences avec changement de signe remplissent également les cases symétriques à celles de ces différences avec leurs signes, et se placent aux cases angulaires; les trois autres différences se mettent à volonté dans leurs lignes, et leurs complémens dans les cases opposées, à cause du carré central : autrement le carré total ne serait pas magique. On verra ce carré de 7 avec les nombres et les différences (*pl.* XXII *bis*, *fig. a*).

On voit facilement que la somme des deux bordures est exacte : car les parties qui recouvrent le carré font 2 couples, les diagonales en ont aussi 2, et les cases symétriques en donnent un, puisque les signes sont différens, les différences étant les mêmes. Ce sont de nouvelles combinaisons à donner aux carrés.

Voici le carré de 9 avec trois bordures n'en faisant qu'une triple.

Le carré central est composé des 3 progressions 7 · 18 · 29. . . . 30 · 41 · 52. . . . 53 · 64 · 75; il reste les différences :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
35	36	37	38	39	40				

Soit la 1.re horizontale :

$$40+39+38+37-36-35-33-32-18$$

la 2.e $31+30+29+28-27-26-25-24-16$

la 3.e $22+21+20+10-19-17-15-14-8$

Les verticales doivent avoir une différence commune avec chaque horizontale, en conservant le signe de cette différence; plus une autre avec changement de signe. Il n'y aura toujours que 3 différences, dont on pourra disposer parmi les restantes; et, en général, autant qu'il y a de cases à une ligne du carré central.

Les différences restantes sont 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 13; si l'on forme les deux premières verticales comme suit :

1.re verticale $40+31+22-37-30-20-13+6+1$

2.e verticale $39+28+10-38-29-21+9+7-5$

il reste en différences 2, 3, 4 : ce qui donne pour différences de différences $2+3+4=9$... $2+3-4=1$... $2+4-3=3$... $3+4-2=5$.

Il reste des trois horizontales les cinq dernières différences. Il s'agit d'en prendre deux de chacun des groupes, dont une avec changement de signe, de manière que la somme des six différences soit ± 9, ± 1, ± 3, ± 5. Il y a beaucoup de manières d'y parvenir. Si l'on choisit $-36-24-17+35+25+14=-3$, il faudra $4+2-3=3$; et alors on aura pour cette troisième verticale :

3.e verticale $-36-24-17+35+25+14+4+2-3$

Le carré de 9 avec les nombres et les différences se trouve (*planche* XXII *bis*, *figure b*).

On voit avec quelle rapidité on arrive au résultat. Toute la méthode ne consiste donc qu'à placer symétriquement les complémens des différences qui ne couvrent pas le carré central. Par ce moyen la triple bordure se construit plus promptement que les trois bordures qu'il faut chercher pour la méthode de Frénicle; et, en second lieu, on évite cette méthode, qui laisse de l'incertitude, et nécessite des corrections dont on est dispensé au moyen de la composition ci-dessus.

Si l'on voulait *la 1.re bordure exacte*, et que les deux autres ne fissent qu'une bordure double, on construirait d'abord régulièrement la première, et l'on considèrerait le carré central avec cette bordure, comme ne faisant qu'un seul carré central. Le reste s'arrangerait à l'ordinaire. Dans le carré ci-dessus le carré central comprend les 9 nombres du milieu. Sa bordure a été construite par les 8 différences suivant les 4 premières, ou par les différences 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, en plus et en moins.

Horizontale $12+11-6-7-10$
Verticale... $12-5-8-9+10$

La bordure double se forme avec les différences restantes; chaque verticale aura une différence de chaque horizontale avec son signe, et une autre avec signe contraire : il y aura donc 10 différences restantes, et l'on disposera de cinq d'entr'elles pour chaque verticale.

Soient les horizontales, savoir :

1.re horizontale $\overline{40}+39+38+\overline{37}-33-32-31-\overline{30}-\overline{28}$

2.e horizontale $36+35+\overline{34}+\overline{24}-\overline{29}-27-26-25-\overline{22}$

Qu'on forme à volonté la première verticale, comme il est dit, savoir :

1.re verticale $\overline{40}+23+\overline{34}-\overline{37}-\overline{24}+21-18-19-20$

Il reste les différences 13, 14, 15, 16, 17.

On peut faire la 2.e verticale, savoir :

2.e verticale $16+17-13-14+\overline{29}-15+\overline{30}-\overline{22}-\overline{28}$

On a marqué d'un trait les différences qui font partie des verticales et des horizontales ; celles qui n'ont pas cette marque se placent à volonté dans leurs lignes respectives, au dessus de la bordure du carré central, et à côté de cette bordure. Ces traits font également éviter les faux placemens de différences. Ainsi 40, étant commun à la 1.re horizontale et à la 1.re verticale, sera à l'angle commun. 37 à la 1.re horizontale, ayant — 37 à la 1.re verticale, sera à l'angle de droite, et — 37 à l'angle inférieur de la 1.re verticale ; 34, commun à la 2.e horizontale et à la 1.re verticale, sera placé à la case commune, qui est la première de la 2.e horizontale; 24 à la 2.e horizontale, ayant — 24 à la 1.re verticale, sera placé à la dernière case de cette 2.e horizontale, et — 24 symétriquement à l'avant-dernière case de la 1.re verticale; de même — 28, étant commun à la 1.re horizontale et à la 2.e verticale, sera placé à la case commune, qui est la première de cette 2.e verticale; — 30, à la 1.re horizontale, ayant + 30 à la 2.e verticale, sera placé à la case symétrique, qui est l'avant-dernière de la 1.re horizontale; — 22, commun à la 2.e horizontale et à la 2.e verticale, sera à la case commune, qui est la seconde des 2.e horizontale

et 2.e verticale; enfin — 29, à la 2.e horizontale, ayant + 29 à la 2.e verticale, sera placé à l'angle du carré central, considéré avec sa bordure, et 29 à la case symétrique, ou à l'autre angle diagonal de ce carré central. Il n'y a jamais d'incertitude à cet égard. On est entré dans ce détail parce qu'il servira par la suite pour d'autres carrés auxquels il sert de base.

On peut être curieux de connaître quelles seraient les secondes verticales, lorsqu'on a déjà formé arbitrairement les deux horizontales et la première verticale; ici les différences de différences sont indispensables. Voir d'abord le carré de 9 construit d'après les données ci-dessus (*planche 22 bis, figure c*).

Pour avoir les secondes verticales; puisque chacune est composée de deux différences de chaque horizontale, dont l'une avec changement de signe, et des cinq différences restantes avec les signes $\pm$, il suit que l'on doit chercher toutes les différences que peuvent comporter ces cinq différences, et il suffit d'avoir des résultats positifs, comme on va le voir.

Si l'on cherche toutes les différences 2 à 2 que présentent les différences de la 1.re horizontale non employées dans la 1.re verticale, on aura tous les couples de différences dont une avec changement de signe, que présente la 1.re horizontale, et qui peuvent faire partie de la 2.e verticale.

Si l'on agit de même sur les différences non employées de la 2.e horizontale, il est clair qu'en ajoutant ou soustrayant l'une de l'autre ces nouvelles différences, il faut que cette somme, ou le résultat de cette soustraction, pré-

sente un nombre égal aux différences des cinq différences restantes.

Si l'on prenait celles-ci négativement, la somme ci-dessus deviendrait positive; si, au contraire, on les prenait positivement, cette somme serait négative : c'est pourquoi, ainsi qu'on l'a dit, il ne faut s'occuper que des résultats positifs.

Les cinq différences restantes sont 13, 14, 15, 16, 17. On les ajoutera; ensuite on en soustraira une de la somme des 4 autres; puis 2 de la somme des 3 autres. Il est inutile d'aller plus loin : car on obtiendrait le même résultat, avec changement de signe, en ôtant 3 différences de la somme de 2 autres; or 5 lettres combinées 4 à 4 donnent le même résultat que 5 lettres combinées 1 à 1. Ainsi il n'y aura que 5 différences de différences, si l'on soustrait l'une de la somme des 4 autres.

De même, 5 lettres combinées 3 à 3 donnant le même résultat que 5 lettres combinées 2 à 2, on aura, pour le cas où l'on ôte 2 différences de la somme des 3 autres, $\frac{5\cdot4}{1\cdot2}=10$: donc 10 différences de différences pour le second cas. Voici les résultats :

$13+14+15+16+17=75$
$13+14+15+16-17=41$
$13+14+15+17-16=43$
$13+14+16+17-15=45$
$13+15+16+17-14=47$
$14+15+16+17-13=49$

$13+14+15-16-17=9$
$13+14+16-15-17=11$
$13+15+16-14-17=13$
$14+15+16-13-17=15$
$13+14+17-15-16=13$
$13+15+17-14-16=15$
$14+15+17-13-16=17$
$13+16+17-14-15=17$
$14+16+17-13-15=19$
$15+16+17-13-14=21$

Les différences de la 1.re horizontale non employées dans la 1.re verticale, sont + 39 + 38 — 33 — 32 — 31 — 30—28.

Celles de la 2.e horizontale également non employées dans la même verticale sont + 36 + 35 — 29 — 27 — 26 — 25 — 22.

Formant les différences de différences 2 à 2, on aura:

1.re horizontale.		2.e horizontale.	
39—38... 1	33—32... 1	36—35... 1	29—27... 2
39+33... 72	33—31... 2	36+29... 65	29—26... 3
39+32... 71	33—30... 3	36+27... 63	29—25... 4
39+31... 70	33—28... 5	36+26... 62	29—22... 7
39+30... 69	32—31... 1	36+25... 61	27—26... 1
39+28... 67	32—30... 2	36+22... 58	27—25... 2
38+33... 71	32—28... 4	35+29... 64	27—22... 5
38+32... 70	31—30... 1	35+27... 62	26—25... 1
38+31... 69	31—28... 3	35+26... 61	26—22... 4
38+30... 68	30—28... 2	35+25... 60	25—22... 3
38+28... 66		35+22... 57	

Il faut maintenant qu'en ajoutant l'un des résultats de la 1.re horizontale avec l'un de ceux de la 2.e, ou en soustrayant l'un de l'autre, on obtienne l'une des différences des cinq différences dont on a le tableau. Or, en jetant les yeux sur ces différens tableaux, on voit qu'il n'est pas possible d'avoir, soit par addition, soit par soustraction, les résultats 41, 43, 45, 47, 49: car l'un des grands nombres soustrait d'un autre grand nombre aurait une différence trop petite; un petit soustrait d'un grand donnerait une différence trop grande : ainsi 5, plus grand des petits

nombres, ôté de 57, plus petit des grands, resterait 52, plus grand que 49. On ne compare pas 7, qui est en effet le plus grand des petits : car il faudrait l'ôter de 66, et la différence 59 est encore plus grande que 52.

On ne peut pas avoir 17, 19 et 21 : car un petit nombre soustrait d'un grand donne un résultat trop grand, et le plus petit grand nombre soustrait du plus grand des grands nombres, ce qui serait ici 72 — 57, ne donne que 15<17, et à plus forte raison < 19 < 21 : il n'est donc plus question que d'obtenir 75, 9, 11, 13, 15, à quoi se réduisent les différences des cinq différenees restantes. C'est ce qu'on obtient facilement. D'abord on ne peut pour 75 combiner deux petits nombres ni deux grands; de plus, les grands nombres de la 2.e horizontale ne peuvent se combiner avec les petits de la 1.re : car le plus grand de cette 2.e horizontale est 65, et le plus grand des petits de la 1.re horizontale est 5 : or 65+5=70<75; il faudra donc combiner les grands de la 1.re horizontale avec les petits de la 2.e.

Quant à 9, 11, 13, 15, on ne peut comparer un grand et un petit nombre, mais bien deux grands ou deux petits, comme on le verra ci-dessous.

D'abord 9 par les petits nombres s'obtient par 2+7, et 4+5; il s'obtient encore par 66—57, 67—58, 69—60, 70—61, 71—62, 72—63.

11 peut provenir de 4+7, 68—57, 69—58, 71—60, 72—61.

13 s'obtient par 70—57, 71—58.

15 ne peut provenir que de 72—57.

Au moyen des données précédentes on obtient facilement les résultats suivans :

39 + 33 + 29 — 26	
39 + 33 + 25 — 22	
39 + 32 + 29 — 25	
39 + 32 + 26 — 22	
39 + 31 + 27 — 22	75
38 + 30 + 29 — 22	
38 + 32 + 27 — 22	
38 + 33 + 29 — 25	
38 + 33 + 26 — 22	

33 — 31 + 29 — 22	
32 — 30 + 29 — 22	
30 — 28 + 29 — 22	
33 — 28 + 29 — 25	
33 — 28 + 26 — 22	
32 — 28 + 27 — 22	
38 + 28 — 35 — 22	
39 + 28 — 36 — 22	
39 + 30 — 35 — 25	
38 + 31 — 35 — 25	9
39 + 31 — 36 — 25	
39 + 31 — 35 — 26	
38 + 32 — 36 — 25	
38 + 32 — 35 — 26	
39 + 32 — 36 — 26	
39 + 32 — 35 — 27	
38 + 33 — 36 — 26	
38 + 33 — 35 — 27	
39 + 33 — 36 — 27	

32 — 28 + 29 — 22
38 + 30 — 35 — 22
39 + 30 — 36 — 22
38 + 31 — 36 — 22
39 + 32 — 35 — 25
38 + 33 — 35 — 25
39 + 33 — 36 — 25
39 + 33 — 35 — 26
} 11

39 + 31 — 35 — 22
38 + 32 — 35 — 22
39 + 32 — 36 — 22
38 + 33 — 36 — 22
} 13

39 + 33 — 35 — 22 15

En tout 41 secondes verticales ; et, comme on peut changer le signe du résultat des différences des cinq différentes, et par conséquent aussi celui des résultats qui précèdent, on aurait encore 41 autres verticales : total, 82.

Ce grand nombre de verticales fait qu'on s'abstient de la recherche que l'on vient de faire, parce qu'on trouve aisément, et à l'œil, une verticale convenable.

Les bordures triples, quadruples, etc., peuvent alterner de manière à se trouver entre des bordures simples régulières, ou d'autres, bordures aussi doubles, triples, etc. Ainsi, pour le carré de 15 à carré central de 3, que l'on veuille, par exemple, les 2.e, 3.e et 5.e bordures fautives : comme il y aurait 6 bordures simples, on composerait les 1.re et 2.e horizontales à l'ordinaire, ainsi

que les 1.re et 2.e verticales, en plaçant les complémens des 4 cases autour des angles symétriquement, et les autres complémens aux cases opposées, puisque la 4.e bordure est régulière. On aura par ce moyen une double bordure extérieure, et la 5.e sera fautive. On passera aux trois horizontales et aux trois verticales suivantes, pour le carré de 11, et les nombres seront encore placés symétriquement, sauf ceux qui couvrent le carré de 5, lequel est régulier, et l'on aura bordure triple; enfin on composera la 6.e horizontale et la 6.e verticale, chacune de 5 cases à chaque ligne, et régulièrement.

On a choisi le carré central formé des 9 nombres du milieu du carré total, lesquels sont 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117. Puisque le moyen est alors au milieu, il restera les différences de ± 5 à ± 112. On peut se dispenser de faire le tableau de ces différences et des nombres qui y répondent : car il est facile de trouver ces derniers, lorsqu'une différence pour l'un d'eux est connue, et il n'est pas plus difficile de composer les bordures sans tableau, en prenant, autant que possible, des différences qui se suivent en plus et en moins, et en commençant par les plus grandes.

Soit donc

la 1.re horiz. $112+111+\overset{2.v.}{110}+\overset{2.v.}{109}+108+107+106-\overset{1.v.}{99}-\overset{1.v.}{98}-97-96-95-94-93-91$

2.e horiz. $\overset{1.v.}{105}+\overset{1.v.}{104}+\overset{2.v.}{103}+\overset{2.v.}{102}+101+100+84-92-90-89-88-87-86-85-82$

1.re vertic. $\overset{1.h.}{99}-\overset{1.h.}{98}+\overset{2.h.}{105}-\overset{2.h.}{104}+83+81+80+79+78-63-66-67-68-69-70$

2.e vertic. $\overset{1.h.}{110}-\overset{1.h.}{109}+\overset{2.h.}{103}-\overset{2.h.}{102}+73+74+75+76+77-71-72-64-65-52-53$

Substituant les nombres, on aura double bordure, et la 5.e sera fautive; la 6.e sera exacte, d'après la construction.

Passant au carré de 11, soient les horizontales et verticales, savoir :

1.re horizontale... $\overset{1.v.}{62}+\overset{3.v.}{61}+60+\overset{3.v.}{59}+\overset{1.v.}{58}-\overset{2.v.}{57}-56-55-\overset{2.v.}{54}-40-38$

2.e horizontale... $\overset{1.v.}{51}+50+49+48+\overset{1.v.}{47}-\overset{2.v.}{46}-\overset{3.v.}{45}-\overset{3.v.}{44}-\overset{2.v.}{43}-34-33$

3.e horizontale... $\overset{1.v.}{42}+41+39+37+\overset{1.v.}{31}-\overset{3.v.}{36}-\overset{2.v.}{35}-\overset{3.v.}{32}-30-\overset{2.v.}{29}-28$

1.re verticale..... $\overset{1.h.}{62}-\overset{1.h.}{58}+\overset{2.h.}{51}-\overset{2.h.}{47}+\overset{3.h.}{42}-\overset{3.h.}{31}+27+26-25-24-23$

2.e verticale..... $\overset{1.h.}{57}-\overset{1.h.}{54}+\overset{2.h.}{46}-\overset{2.h.}{43}+\overset{3.h.}{35}-\overset{3.h.}{29}+22+21-20-19-16$

3.e verticale..... $\overset{1.h.}{61}-\overset{1.h.}{59}+\overset{2.h.}{45}-\overset{2.h.}{44}+\overset{3.h.}{36}-\overset{3.h.}{32}+18+17-15-14-13$

Il reste les différences 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, avec lesquelles on compose aisément l'horizontale et la verticale de la bordure.

Si l'on voulait connaître toutes les bordures qu'on pourrait faire avec ces 8 différences, on remarquerait d'abord que 12 ne peut se joindre à deux autres différences : car 12, avec les deux plus petites 5 et 6, fait 23; or on ne peut faire 23 avec deux autres différences : donc 12, qui doit faire partie de l'une des lignes, ne peut s'y trouver avec deux autres différences du même signe. On joindra 12 successivement avec 11, 10, 9, 8, 7, et l'on aura

12+11—10—8—5	12+10— 9—7—6
—10—7—6	12+ 9—10—6—5
— 9—8—6	— 8—7—6
12+10—11—6—5	12+ 8— 9—6—5
— 9—8—5	12+ 7— 8—6—5

On verra, pour chaque combinaison ci-dessus, quels sont les nombres restans; on formera les différences de différences, ce qui en donnera 4 : elles seront toutes paires, ce qui provient de ce qu'il y a autant de pairs que d'impairs dans les 8 différences restantes. Par conséquent, puisque chaque ligne a 5 différences, il faut qu'il y entre deux impairs : autrement la somme de ces différences ne pourrait être = 0. Il restera donc 2 impairs et 1 pair parmi les 3 différences à comparer entr'elles, ce qui donne un résultat pair. Maintenant il faut prendre les différences de chaque ligne ci-dessus, deux par deux, mais ne s'occupant que des résultats pairs. Par exemple, les différences restantes, après la 1.re ligne, 12+11—10—8—5, sont 6, 7, 9, qui donnent 6+7+9=22... 6+7—9=4... 6+9—7

=8... 7+9—6=10; mais 12+10=22; 12+8=20; 11+5=16; 10—8=2: il n'y a que 22 qui puisse servir à la verticale, laquelle sera 12+10—6—7—9.

Agissant de même pour les autres verticales, on aura :

12+11—10—8—5	12+10— 6— 7— 9....	1
12+11—10—7—6	12+10— 5— 8— 9....	2
12+11—10—7—6	10— 6+ 9— 8— 5....	3
12+11— 9—8—6	8— 6+10— 7— 5....	4
12+10—11—6—5	11— 5+ 9— 7— 8....	5
* 12+10— 9—8—5	12—10+11— 7— 6 *	
* 12+10— 9—7—6	12—10+11— 8— 5 *	
12+10— 9—7—6	9— 7+11— 8— 5....	6
12+ 9—10—6—5	10— 6+11— 7— 8....	7
12+ 9— 8—7—6	9+ 7+ 5—10—11....	8
12+ 8— 9—6—5	8+ 6+ 7—10—11....	9
12+ 7— 8—6—5	7+ 5+ 9—10—11....	10

On pourrait croire qu'il y a 12 systèmes de lignes; mais il y en a qui rentrent les uns dans les autres; on les a marqués d'un signe, et il reste 10 systèmes. Si l'on choisit le 2.e, on aura :

Horizontale.... 12+11—10—7—6

Verticale...... 12— 5+10—8—9

Il résulte de l'analyse ci-dessus que l'on arrive facilement, par le moyen des différences de différences, à trouver la dernière ligne que l'on cherche; mais, comme la plus légère altération dans l'une des précédentes oblige de recommencer l'opération, on conçoit qu'on ne se serve que rarement de ces différences de différences; d'ailleurs il y a souvent tant de différences à combiner entr'elles, et il en reste un si grand nombre, que le travail deviendrait

insupportable. Il y a des cas cependant où il est bon de recourir à cette méthode des différences de différences.

On doit faire remarquer une fois pour toutes que, dans l'opération de la composition de bordures doubles, triples, etc., il faut considérer, comme on l'a fait jusqu'à présent, chaque carré terminé par une bordure exacte, comme si ce carré était sans bordure. En conséquence les différences qui seront placées au dessus ou à gauche de ces carrés pour les horizontales et les verticales, auront leurs complémens toujours opposés, et jamais symétriques. On trouvera le carré de 15, d'après les données ci-dessus, (*planche* XXII *bis*, *figure d*).

On a donc une bordure simple, une double et une triple. On va terminer par le carré de 17 les bordures de carrés impairs. On suppose qu'on veuille les 1.re et 2.e bordures régulières; puis une bordure triple, et les deux dernières régulières; on donne ce carré, dont on a supprimé les différences, et dont on se contente de présenter le détail. Le carré central de 3 se compose des nombres 133, 136, 139, 142, 145, 148, 151, 154, 157. Voir (*planche* XXII *bis*, *figure e*).

Les deux premières bordures étant construites, on les considère, avec le carré central, comme ne faisant ensemble qu'un seul carré central de 7. Les trois suivantes sont arrangées pour en donner une triple, et les deux dernières sont construites régulièrement.

Ce carré a été construit immédiatement, sans correction. On va voir, par la composition des lignes, qu'on est parvenu, sans tableau des différences, à écrire sur le champ ce carré. On n'a eu que les nombres à substituer aux différences, opération facile, et qui n'exige qu'un peu d'attention.

7.e bordure.
- Horizontale. 137—136+138+139+140+141+142+143+144—135—134—133—132—131—130—129—64
- Verticale. . . 137+136+124+125+126+127+128—116—117—118—119—120—121—122—123+115—62

6.e bordure.
- Horizontale. 114—106+113+112+111+110+109+108—107—105—104—103—102—74—76
- Verticale. . . 114+106+101+100+99+98+97—91—92—93—94—95—96—75—79

5.e, 4.e et 3.e bordures, formant une bordure triple.

	1.v.	1.v.	3.v.	3.v.	2.v.	2.v.							
1.re horizontale.	90	+89	+85	+86	+87	+88	—80	—81	—82	—83	—84	—78	—37
	1.v.	1.v.	2.v.	2.v.			3.v.					3.v.	
2.e horizontale.	77	+73	+72	+71	+70	+69	—68	—67	—66	—65	—61	—63	—42
	1.v.	1.v.		2.v.	2.v.		3.v.						3.v.
3.e horizontale.	60	+59	+58	+57	+56	+55	—54	—53	—52	—51	—50	—49	—36
	1.h.	1.h.	2.h.	2.h.	3.h.	3.h.							
1.re verticale. .	90	—89	+77	—73	+60	—59	+48	+47	+46	—43	—38	—34	—32
	1.h.	1.h.	2.h.	2.h.	3.h.	3.h.							
2.e verticale. .	88	—87	+72	—71	+57	—56	+45	+44	+41	—40	—35	—33	—25
	1.h.	1.h.	2.h.	2.h.	3.h.	3.h.							
3.e verticale. .	86	—85	+68	—63	+54	—36	—39	+30	+31	+29	—28	—27	—20

2.e bordure. { Horizontale. 26+23+24—22—21—17—13
{ Verticale... 26—23+19+18—15—14—11

1.re bordure. { Horizontale. — 5 + 16 + 7 —10 — 8
{ Verticale... — 5 + 2 — 4 — 1 + 8

Passant aux carrés pairs, il n'y a pas plus de difficulté : le carré central sera pair; il importe peu qu'il ait ou n'ait point de bordure. Voici celui de 8, dont la 1.re bordure est fautive, et par conséquent carré central de 4 avec bordure double. Il faut toujours que les cases autour des angles soient remplies symétriquement.

Le couple étant de 65, chaque nombre vaut 32,5; les différences seront donc de 0,5 à 31,5 en plus et en moins. Que l'on compose le carré central des nombres du milieu, qui sont de 25 à 40: il restera les différences de 8,5 à 31,5, qui sont celles des nombres de 1 à 24. Soient donc les horizontales et les verticales :

1.re h. $\overset{1.v.}{31,5}+\overset{1.v.}{30,5}+29,5-\overset{2.v.}{28,5}-\overset{2.v.}{27,5}-26,5-25,5+16,5$

2.e h. $\overset{1.v.}{24,5}+\overset{1.v.}{23,5}-22,5-\overset{2.v.}{21,5}-\overset{2.v.}{20,5}-19,5+18,5+17,5$

1.re v. $\overset{1.h.}{31,5}-\overset{1.h.}{30,5}+\overset{2.h.}{24,5}-\overset{2.h.}{23,5}-15,5+14,5-13,5+12,5$

2.e v. $\overset{1.h.}{27,5}+\overset{1.h.}{28,5}-\overset{2.h.}{20,5}+\overset{2.h.}{21,5}-11,5+10,5-9,5+8,5$

Substituant les nombres aux différences, il viendra le carré (*planche* XXII *bis*, *figure f.*)

Si dans le carré de 10 à toutes bordures on voulait que la première fût irrégulière, on construirait la plus extérieure à l'ordinaire, les complémens étant aux cases opposées, et les deux premières bordures en feraient une double. Que l'on prenne encore les 16 cases du milieu pour le carré

central : il restera les différences de 8,5 à 19,5. (Voir *planche* XXIII *bis*, *figure g.*)

On se dispense de donner le détail des lignes.

Il ne serait pas plus difficile de faire le même carré avec la 2.e bordure fautive : on construirait la 1.re, qui est régulière, et le carré serait celui de 6; on agirait à l'ordinaire. On pourrait aussi commencer par la bordure double, et conserver les 36 nombres du milieu pour le carré de 6 avec ou sans bordure. On va terminer par le carré de 14 à 5 bordures, de manière que les 1.re, 2.e, 3.e et 4.e soient fautives, ou mieux, de manière à avoir bordure quintuple. (*Planche* XXIII *bis*, *figure h.*)

On va donner les lignes de différences, et l'on peut juger de la facilité avec laquelle on arrive au résultat dans tous les cas. On voit combien la méthode donnée est préférable à celle de Frénicle, laquelle, d'ailleurs, peut ne pas se prêter aux changemens que l'on veut effectuer, et présente des causes d'erreurs que l'on ne peut rencontrer par le moyen donné. On doit toujours, par la méthode de Frénicle, commencer par construire le carré avant de le rectifier, et faire des bordures inutiles.

Voici les lignes du carré de 14 ci-dessus :

1.re horizontale.	— 88,5—89,5+87,5+86,5—93,5—94,5—91,5—92,5+85,5+84,5+97,5+96,5+95,5—83,5
2.e horizontale.	+ 82,5+81,5—78,5—79,5—76,5—77,5—74,5—75,5+64,5+63,5+90,5+80,5—73,5—72,5
3.e horizontale.	+ 71,5+70,5+68,5+67,5—65,5—66,5—61,5—62,5—58,5—59,5+69,5—60,5+44,5+42,5
4.e horizontale.	+ 57,5+56,5+55,5+54,5—51,5—52,5—49,5—50,5—46,5—47,5+53,5—48,5+35,5+33,5
5.e horizontale.	+ 41,5+40,5+45,5+43,5—37,5—38,5—34,5—36,5—30,5—31,5+39,5—32,5+20,5+18,5
1.re verticale.	— 88,5+89,5+82,5—81,5+71,5—70,5+57,5—56,5+41,5—40,5—29,5—28,5+27,5+25,5
2.e verticale.	+ 87,5—86,5—78,5+79,5+68,5—67,5+55,5—54,5+45,5—43,5—26,5—24,5+23,5+21,5
3.e verticale.	— 93,5+94,5—76,5+77,5—65,5+66,5—51,5+52,5—37,5+38,5—22,5+19,5—17,5+15,5
4.e verticale.	— 91,5+92,5—74,5+75,5—61,5+62,5—49,5+50,5—34,5+36,5—16,5—14,5+13,5+11,5
5.e verticale.	+ 85,5—84,5+64,5—63,5—58,5+59,5—46,5+47,5—30,5+31,5—12,5+ 9,5—10,5+ 8,5

On a distribué les différences de manière à indiquer, aux verticales, celles de ces différences communes aux horizontales avec le même signe ou signe contraire. Ainsi, à la 1.re verticale, par exemple, les deux premières différences sont les deux premières de la 1.re horizontale, et la première des deux conserve le signe, la seconde le change; les deux différences suivantes se rapportent à la 2.e horizontale, et les signes ont la même distribution; les deux différences qui viennent après, sont tirées de la 3.e horizontale; les suivantes, de la 4.e, et les deux qui suivent, de la 5.e. Les quatre dernières sont celles qui recouvrent le carré central dans les dix lignes. La 2.e verticale présente le même arrangement que la première, et ainsi des autres. On voit qu'il ne faut qu'un peu d'ordre pour arriver promptement au carré cherché.

Il n'est pas nécessaire que les différences se suivent comme dans les exemples donnés. Soit à faire le carré de 9 avec la 1.re bordure exacte et double bordure. Soit le carré central formé par les nombres 1, 8, 15.... 34, 41, 48.... 67, 74, 81 : il restera les différences.

1 2 3 4 5 6.... 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19
20 21 22 23 24 25..... 27 28 29 30 31 32..... 34
35 36 37 38 39.

Soit la bordure du carré de 3 :

Horizontale. — 23 — 28 + 39 + 36 — 24
Verticale... — 23 + 28 + 11 — 13 — 3

Il restera les différences

1 2 4 5 6 8 9 10 12 14 15 16 17 18 19 20 21 22
25 27 29 30 31 32 34 35 37 38

Pour la bordure double, soient les horizontales et les verticales :

1.re horiz. —32—34+21+12+20+38— 6—17— 2
2.e horiz. —29—27+35+25+22—15—14—16+19
1.re vert. —32+34—27+29+31—37+10— 9+ 1
2.e vert. —21—12+35—25+18+ 5—30— 8— 4

Il reste à donner les combinaisons de ces bordures multiples.

CARRÉ DE 9 A DOUBLE BORDURE.

Le carré central de 25 comprend les 25 nombres du milieu.

Chaque ligne du carré de 9 doit être impaire, ayant 9·41=369. Par les différences, à chaque différence paire répond un nombre impair, et réciproquement : d'où il suit que les différences impaires doivent être en nombre pair dans chaque ligne, afin que les paires soient en nombre impair, et par conséquent que les nombres correspondans aux différences paires y soient en nombre impair.

Cela établi, il faut voir quelles sont les combinaisons pour les deux horizontales, d'après le nombre d'impairs qui les composent. Il ne s'agit pas ici des permutations des 9 nombres choisis pour chaque ligne, mais seulement du choix de 9 différences pour chaque horizontale. D'abord on ne peut prendre 2 impairs sur les 14 que présentent les différences de 13 à 40 : car il faudrait 16 pairs, et l'on n'en a que 14.

PREMIER CAS.

Soient donc 4 impairs et 14 pairs pour les deux lignes :

on peut avoir ou 2 impairs dans chaque ligne ou les 4 impairs dans une ligne.

Que les 4 impairs soient dans une ligne : il reste 5 pairs à placer sur 14, ce qui donne $\frac{14\cdot13\cdot12\cdot11\cdot10}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}=2002$; les 4 impairs sur 14 donnent $\frac{14\cdot13\cdot12\cdot11}{1\cdot2\cdot3\cdot4}=1001$. Ainsi pour la première ligne on aura $2002\cdot1001=2004002$; la seconde ligne, comprenant les 9 pairs restans, est déterminée : il n'y a donc dans ce cas que les 2004002.

Il y a 2 impairs dans chaque ligne; il reste les 14 pairs, ce qui donne pour 7 sur 14, 3432. Les 2 impairs sur 14 donnent $\frac{14\cdot13}{2}=91$. Ainsi $3432\cdot91=312312$; la 2.e ligne est déterminée quant aux pairs par les 7 de la première; mais pour les 2 impairs sur les 12 restans, elle aurait $\frac{12\cdot11}{2}$ $=66$: donc $312312\cdot66=20612592$.

DEUXIÈME CAS.

S'il y a 6 impairs employés, ils seront, ou 2 dans une ligne et 4 dans l'autre, ou tous les 6 dans une même ligne.

Soient les 6 dans une ligne : cela donnera $\frac{14\cdot13\cdot12\cdot11\cdot10\cdot9}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}$ $=3003$; les 3 pairs auront $\frac{14\cdot13\cdot12}{1\cdot2\cdot3}=364$: donc $3003\cdot364$ $=1093092$. Quant à la 2.e ligne, elle aura 9 pairs sur les 11 restans, ou $\frac{11\cdot10}{2}=55$: ainsi il vient $1093092\cdot55=60120060$.

S'il y a 2 impairs dans une ligne et 4 dans l'autre, la 1.re aura, pour les 7 pairs, 3432, et pour les 2 impairs 91 : en tout $312312=3432\cdot91$. La seconde ligne aura 5 pairs à prendre sur les 7 restans ou $\frac{7\cdot6}{2}=21$, et sur les 12 impairs elle en doit prendre 4 ou $\frac{12\cdot11\cdot10\cdot9}{1\cdot2\cdot3\cdot4}=495$: donc $495\cdot21$ $=10395$. Ainsi pour ce cas, $312312\cdot10395=3246483240$.

TROISIÈME CAS.

On emploie 8 impairs; ils seront dans la même ligne,

ou 6 dans l'une et 2 dans l'autre, ou 4 dans chaque ligne.

Soient les 8 dans la même ligne : il faudra encore un pair; ces 8 impairs donnent $\frac{14\cdot13\cdot12\cdot11\cdot10\cdot9}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} = 3003$. Il faut un pair sur 14, ce qui donne 14; ainsi $3003\cdot14 = 42042$. Quant à la 2.e ligne, elle aura 9 nombres pairs sur les 13 restans, ou $\frac{13\cdot12\cdot11\cdot10}{1\cdot2\cdot3\cdot4} = 715$, ainsi $42042\cdot715 = 30060030$ pour ce cas.

S'il y a 2 impairs dans une ligne et 6 dans l'autre, la première aura 312312 comme ci-dessus; la seconde ligne aura 6 impairs sur les 12 restans, ou $\frac{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} = 924$; et pour 3 pairs sur 7 restans $\frac{7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3} = 35$: d'où $924\cdot35 = 32340$, et $312312\cdot32340 = 13130170080$ pour ce cas.

Enfin 4 impairs dans chaque ligne donneront pour la première $\frac{14\cdot13\cdot12\cdot11}{1\cdot2\cdot3\cdot4} = 1001$. 5 pairs fourniront $\frac{14\cdot13\cdot12\cdot11\cdot10}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} = 2002$: ainsi $2002\cdot1001 = 2004002$. La 2.e ligne aura 4 impairs sur 10 restans, $\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{1\cdot2\cdot3\cdot4} = 210$, et 5 pairs sur 9 restans $= \frac{9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} = 126$: donc $126\cdot210 = 26460$ et $2004002\cdot26460 = 53025892920$.

QUATRIÈME CAS.

On emploie 10 impairs, et il y aura ou 2 et 8 dans les lignes, ou 4 et 6.

Pour 2 et 8, la 1.re ligne aura 91 pour les 2 impairs, et 3432 pour les 7 pairs, ce qui donne 312312. La 2.e ligne aura 7 pour le pair qui lui manque sur 7 restans; quant aux 8 impairs sur 12, on aura $\frac{12\cdot11\cdot10\cdot9}{1\cdot2\cdot3\cdot4} = 495$: donc 495 par $7 = 3465$, et $312312\cdot3465 = 1082161080$.

Si l'on prend 4 et 6 impairs pour les lignes, la 1.re aura pour les impairs $\frac{14\cdot13\cdot12\cdot11}{1\cdot2\cdot3\cdot4} = 1001$, et pour les 5 pairs 2002, ce qui donne $2002\cdot1001 = 2004002$. La 2.e ligne

aura 6 impairs sur 10 restans $= 210$, et 3 pairs sur 9 $= \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 84$. Ainsi $84 \cdot 210 = 17640$: donc en tout $2004002 \cdot 17640 = 35350595280$.

CINQUIÈME CAS.

On emploie 12 impairs, savoir : 4 et 8 ou 6 et 6.

Qu'on en prenne 4 et 8 : la 1.re ligne aura 2004002 ; la seconde aura 9 combinaisons pour les pairs, puisqu'il en reste 9, et qu'il n'en faut qu'un, plus 8 impairs sur 10 qui restent, ou $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$. Ainsi $45 \cdot 9 = 405$: donc $2004002 \cdot 405 = 811620810$.

Pour 6 dans chaque ligne, il viendra pour la 1.re, et à raison des impairs, $\frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 3003$; et pour 3 pairs, $\frac{14 \cdot 13 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 364$: donc $3003 \cdot 364 = 1093092$; la 2.e ligne aura 6 sur 8 impairs restans $= 28$, et 3 pairs sur les 11 restans $= \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 165$: donc $165 \cdot 28 = 4620$. Ainsi $1093092 \cdot 4620 = 5050085040$.

SIXIÈME CAS.

Enfin si l'on emploie les 14 impairs, il ne peut y en avoir que 6 et 8 dans les lignes : la première aura, comme ci-dessus, 1093092, et la seconde aura les 8 impairs restans, ainsi rien à calculer pour ceux-ci. Il reste 11 pairs : donc la 2.e ligne n'aura que 11 combinaisons, et il viendra $1093092 \cdot 11 = 12024012$.

Réunissant toutes les sommes, on aura

$$2{,}004{,}002 + 20{,}612{,}592 + 60{,}120{,}060 + 3{,}246{,}483{,}240 + 30{,}060{,}030 + 13{,}130{,}170{,}080 + 53{,}025{,}892{,}920 + 1{,}082{,}161{,}080 + 35{,}350{,}595{,}280 + 811{,}620{,}810 + 5{,}050{,}085{,}040 + 12{,}024{,}012 = 111{,}821{,}829{,}246.$$

Ce nombre prodigieux n'est qu'une faible partie des

combinaisons : car pour chaque ligne on peut permuter presque toutes les différences qui la composent, ce qui donne un produit considérable. Nous disons presque, parce que dans beaucoup de cas il y a quelques précautions à prendre, par exemple dans le cas des 14 impairs employés. Il reste 10 pairs pour remplir les 2 verticales; la somme de 5 d'entr'eux sera paire, et par conséquent la somme des nombres impaire. Il faut alors que les 4 différences communes soient impaires, ou deux seulement. On ne pourrait donc avoir aux angles de l'une des horizontales deux pairs, et aux extrémités de l'autre horizontale un seul impair : car la 1.re verticale n'aurait qu'une différence impaire; il résulterait qu'on aurait 8 pairs, et que la somme des nombres serait paire; et, comme la différence unique impaire donnerait aussi un nombre pair, la verticale serait paire. Il en serait de même s'il n'y avait que 3 impairs dans l'une des verticales.

Ce n'est pas tout: il faut pour chaque horizontale former séparément la différence de différences de deux d'entr'elles, et en plus seulement.

On ajoutera ensuite une différence de différences de la 1.re horizontale avec une de la seconde; les résultats obtenus doivent être égaux à quelques-unes des combinaisons de cinq des dix différences restantes, et d'autres résultats égaux à quelques-unes des combinaisons des cinq autres différences. Ces différences restantes doivent être combinées 5 à 5, ce qui donne $\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}=252$, dont moitié seulement est à considérer : car l'une des combinaisons entraîne sa correspondante; il suffira de conserver une différence constante et invariable, et de la combiner avec

les 9 autres, et l'on aura $126 = \frac{252}{2}$. Ceci va s'éclaircir sur un exemple, et l'on verra quelle série de combinaisons résulterait encore de ces comparaisons.

Soient les deux horizontales arbitraires

40+39+38—26—21—20—18—17—15

37+36+35+25—33—32—23—31—14

Les différences restantes sont 34, 30, 29, 28, 27, 24, 22, 19, 16, 13; on aura les 126 combinaisons suivantes:

34	30	29	28	27	34	30	29	19	13	34	30	27	24	16
				24	34	30	29	16	13					13
				22	34	30	28	27	24	34	30	27	22	19
				19					22					16
				16					19					13
				13					16	34	30	27	19	16
34	30	29	27	24					13					13
				22	34	30	28	24	22	34	30	27	16	13
				19					19	34	30	24	22	19
				16					16					16
				13					13					13
34	30	29	24	22	34	30	28	22	19	34	30	24	19	16
				19					16					13
				16					13	34	30	24	16	13
				13	34	30	28	19	16	34	30	22	19	16
34	30	29	22	19					13					13
				16	34	30	28	16	13	34	30	22	16	13
				13	34	30	27	24	22	34	30	19	16	13
34	30	29	19	16					19					

Total des combinaisons pour 34, 30........... (56)

34 29 28 27 24
22
19
16
13
34 29 28 24 22
19
16
13
34 29 28 22 19
16
13
34 29 28 19 16
13
34 29 28 16 13
34 29 27 24 22
19
16
13
34 29 27 22 19
16
13
34 29 27 19 16
13
34 29 27 16 13
34 29 24 22 19
16
13
34 29 24 19
16
34 29 24 19 16
34 29 22 19 16
13
34 29 22 16 13
34 29 19 16 13

Total des combinaisons pour 34, 29. . . . . (35)

---

34 28 27 24 22
19
16
13
34 28 27 22 19
16
13
34 28 27 19 16
13
34 28 27 16 13
34 28 24 22 19
16
13
34 28 24 19 16
13
34 28 24 16 13
34 28 22 19 16
13
34 28 22 16 13
34 28 19 16 13

Total des combinaisons pour 34, 28. . . . . (20)

---

34 27 24 22 19
16
13
34 27 24 19 16
13
34 27 24 16 13
34 27 22 19 16
13
34 27 22 16 13
34 27 19 16 13

Total des combinaisons pour 34, 27. . . . . (10)

---

34 24 22 19 16 34 24 22 16 13 34 24 19 16 13
13

Total des combinaisons pour 34, 24............. (4)

---

34 22 19 16 13............................... (1)

Ces séries de différences présentent les sommes des nombres triangulaires 1, 3, 6, 10, 15, 21.

Il est pour le moment inutile de s'occuper des cinq autres nombres, puisqu'ils sont déterminés par les cinq que l'on vient de considérer.

Soit examinée la dernière combinaison 13, 16, 19, 22, 34. Sa correspondante est 24, 27, 28, 29, 30. Il faut que les cinq différences combinées entr'elles soient égales à la somme des deux différences de différences prises dans les horizontales; or la somme de ces cinq différences est égale à leur addition, ou à la différence de 6 d'entr'elles à la cinquième, ou enfin à la différence de deux aux trois autres; et il suffit de conserver les résultats positifs : car en changeant tous les signes, on aura les résultats négatifs. Il viendra donc les combinaisons suivantes :

34 22 19 16 13

$34+22+19+16+13=104$
$34+22+19+16-13=78$
$34+22+19+13-16=72$
$34+22+16+13-19=66$
$34+19+16+13-22=60$
$19+16+13+22-34=36$
$34+22+19-16-13=46$
$34+22+16-19-13=40$
$34+22+13-19-16=34$
$34+19+16-22-13=34$
$34+19+13-22-16=28$
$34+16+13-19-22=22$
$22+19+16-13-34=10$
$22+19+13-16-34=4$
$19+16+13-23-34=-8$
$22+16+13-19-34=-2$

30 29 28 27 24

$30+29+28+27+24=138$
$30+29+28+27-24=90$
$30+29+28+24-27=84$
$30+29+27+24-28=82$
$30+27+24+28-29=80$
$29+28+27+24-30=78$
$30+29+28-27-24=36$
$30+29+27-28-24=34$
$30+28+27-29-24=32$
$30+29+24-28-27=28$
$30+28+24-29-27=26$
$30+27+24-29-28=24$
$29+28+27-30-24=30$
$29+28+24-30-27=24$
$28+27+24-30-29=20$
$29+27+24-30-28=22$

Les horizontales étant

$$40+39+38-26-21-20-18-17-15$$
$$37+36+35+25-33-32-31-23-14$$

leurs différences seront, savoir : pour la première,

1	2	66	61	60	58	57	55	
40—39...	40—38...	40+26...	40+21...	40+20...	40+18...	40+17...	40+15.....	8
1	65	60	59	57	56	54		
39—38...	39+26...	39+21...	39+20...	39+18...	39+17...	39+15.............		15
64	59	58	56	55	53			
38+26...	38+21...	38+20...	38+18...	38+17...	38+15......................			21
5	6	8	9	11				
26—21...	26—20...	26—18...	26—17...	26—15............................				26
1	3	4	6					
21—20...	21—18...	21—17...	21—15.					30
2	3	5						
20—18...	20—17...	20—15.						33
1	3							
18—17...	18—15..							35
2								
17—15..								36

Les petits nombres au dessus des différences de différences marquent leur valeur.

Les nombres à côté des lignes servent à compter l'ordre de ces différences : ainsi, par

exemple, la 28.e différence de différence serait la 2.e de la ligne marquée 30, et la 30.e serait la dernière de la même ligne.

Pour la seconde, 37+36+35+25—33—32—31—23—14

1	2	12	70	69	68	60	51	
37—36...	37—35...	37—25...	37+33...	37+32...	37+31...	37+23...	37+14.....	8
1	11	69	68	67	59	50		
36—35...	36—25...	36+33...	36+32...	36+31...	36+23...	36+14..............		15
10	68	67	66	58	49			
35—25...	35+33...	35+32...	35+31...	35+23...	35+14..........................			21
58	57	56	48	39				
25+33...	25+32...	25+31...	25+23...	25+14..................................				26
1	2	10	19					
33—32...	33—31...	33—23...	33—14..					30
1	9	18						
32—31...	32—23...	32—14..						33
8	17							
31—23...	31—14..							35
9								
23—14..								36

Les différences de la 1.re horizontale

1 2 3 4 5 6 8 9 11

53 54 55 56 57 58 59 60 61 64 65 66

Les différences de la 2.e horizontale

1 2 8 9 10 11 12 17 18 19

39 48 49 50 51 56 57 58 59 60 66 67 68 69 70

Les points marquent le nombre de fois qu'une différence de différence est égale au nombre pointé.

Si l'on combine chacun des nombres ci-dessus de la 1.re horizontale avec tous ceux de la 2.e, il en résultera des sommes qui seront égales à quelques-unes des différences de différences de l'un des groupes des 10 différences. Cela donnera une verticale. Si l'on obtient une autre somme égale à l'une des différences de l'autre groupe, cela donnera l'autre verticale; mais il faut observer qu'il ne doit pas entrer les mêmes différences de l'une des horizontales dans la formation de l'autre. Voyons des exemples :

Puisque 2 figure dans le 1.er groupe, il s'agit de chercher les moyens de faire 2 en ajoutant les différences ci-dessus, ou en retranchant l'une de l'autre.

1	1		
3	1		
4	2		
6	8		
8	10		
9	11...	11	9
53	51		
54	56		
55	57		
56	58...	58	56
57	59...	59	57
58	60...	60	58
64	66		
65	67		
66	68		

Le 1.er numéro est celui de la 1.re horizontale ; le 2.e est celui de la 2.e.

Qu'on choisisse au hasard l'une des combinaisons ci-contre, par exemple 9, 11... $9=26-17$ de la 1.re horizontale, $11=36-25$ de la 2.e horizontale, et $11-9=2=36-25+17-26$; et l'on aura pour la 1.re verticale

$$36-25+17-26+22+16+13-34-19$$

Pour avoir la 2.e, il faut voir si la combinaison de deux autres différences de différences, dont une de chaque horizontale, peut donner l'une des différences du 2.e groupe, ou les nombres 20, 24, 30, etc. Voyons seulement pour 20 : on ne pourrait choisir 59 et 39 : car 39 de la 2.e horizontale vient de $25+14$, et 25 est déjà employé ci-dessus. Mais 1 +19 donnerait, savoir : $19=33-14$... $1=40-39=39-38=21-20$; mais non $18-17$, parce que 17 est employé : on aurait donc

$$33-14+40-39+30+29-28-27-24$$
$$33-14+39-38$$
$$33-14+21-20$$

On pourrait aussi prendre 2, 18.... 3, 17... 8, 12... 9, 11... 11, 9, etc., etc.; et ainsi de suite.

On obtiendra une quantité considérable de 2.es verticales pour la 1.re choisie.

On en formera une autre avec les nombres ci-contre, et l'on obtiendra de nouvelles secondes.

On va donner toutes les manières d'obtenir les nombres du 2.e groupe de différences, en supposant qu'on égale la somme des deux différences de différences des horizontales, à l'un des nombres des premiers groupes.

(20)	(22)	(24)	(26)	(28)	(30)	(32)	(34)	(36)	(78)	(80)	(82)	(84)	(90 138)
1 30	28 30	22 30	24 33	25 30	26 30	0	22 26	28 26	24 4	26 5	16 33	10 30	0
9 30	32 30	33 30	25 35	26 35	25 26		33 26	32 26	25 5	26 11	10 35	3 33	
27 30	35 30	23 33	10 26	26 26			21 30	35 26	25 11	4 30			
34 30	29 33	29 33						21 35	26 13				
2 33	22 35							15 33	26 18				
31 33	33 35							8 30	12 30				
36 33	26 10							20 30	17 30				
28 35	4 26								5 33				
32 35									11 33				
35 35									4 35				
24 3									19 3				
25 10													
26 32													
26 36													
12 26													
17 26													

Les premiers nombres désignent le numéro d'ordre des différences de la 1.re horizontale; les seconds nombres les numéros d'ordre des différences de la 2.e

Il faudrait donc combiner chacune des manières de faire 2 avec les nombres ci-dessus, en omettant ceux qui auraient mêmes différences que celles de la 1.re verticale: ainsi, puisque 1+1=2, on aura pour le premier 1 les numéros d'ordre 1, 9, 27, 34; et pour le second 1, les numéros d'ordre 1, 9, 27, 31. Ainsi il viendrait:

1 1... 1 9... 1 27... 1 31... 9 1... 9 9... 9 27... 9 31... 27 1... 27 9... 27 27... 27 31... 34 1... 34 9... 34 27... 34 31.

Comparant 1, 1 avec les nombres qui donnent 20, on ne pourra prendre pour le premier 1 aucun des premiers nombres de 20 de 1 à 15, parce que les deux nombres dont la différence=1 se trouvent l'un ou l'autre dans la 1.re verticale; par la même raison on ne pourra prendre pour le second 1 aucun des seconds nombres de 1 à 15. Il restera donc 27 30... 34 30... 31 33... 36 33... 28 35... 32 35... 35 35... 26 32... 26 36... 17 26

et mettant les différences, on aura les verticales, savoir:

Première verticale commune,

40—39+37—36+22+16+13—19—34

Deuxièmes verticales pour 20:

21—20+33—14+30+29—28—27—24

18—17+33—14...

20—18+32—14...

17—15+32—14...

21—18+31—14...

20—17+31—14...

18—15+31—14...
26—15+32—23...
26—15+23—14...
38+21—25—14...

Pour 22 on aura

28 30...32 30...35 30...29 33...22 35...33 35

21—18+33—14+30+28—29—27—24
20—17+33—14...
18—15+33—14...
21—17+32—14...
26—21+31—14...
20—15+31—14...

Pour 24 il viendra 22 30...33 30...23 33...29 33

26—21+33—14+30+27—29—28—24
26—21+33—14+29+28—30—27—24
20—15+33—14+30+27—29—28—24
20—15+33—14+29+28—30—27—24
26—20+32—14+30+27—29—28—24
26—20+32—14+29+28—30—27—24
21—17+32—14+29+28—30—27—24
21—17+32—14+30+27—29—28—24

Comme 24, par les 5 nombres du 2.e groupe, se fait de deux manières, les verticales sont doubles.

Pour 26 on aura 24, 33....25, 35

26—18+32—14+29+27—30—28—24
26—17+31—14...

Pour 28 il viendra 25, 30....26, 35....26, 26

26—17+33—14+28+27—30—29—24
26—15+31—14...
25+14+15—26...

Pour 30, on a 26, 30....25, 26
26—15+33—14+30+24—29—28—27
25+14+17—26...
Pour 32 il n'y a rien.
Pour 34....22, 26....33, 26....21, 30
25+24+21—26+28—24—30—29—27
25+14+15—20...
38+15+14—33...
Pour 36...28,26...32,26...35,26...21,35...20,30
25+14+18—21+27+24—30—29—28
25+14+17—20...
25+14+15—18...
38+15+14—31...
38+17+14—33...
Pour 78 il vient 26, 18....17, 30
35+32+26—15+30—29—28—27—24
38+21+33—14...
Pour 80, 84, 90, 138, rien.
Pour 82 on a 16, 33
38+26+32—14+28—30—29—27—24

On a donc 42 bordures en prenant seulement les différences des deux premiers nombres de chaque horizontale pour former la 1.re verticale.

On viendra à la combinaison 1, 9.

On aura pour 1.re verticale 40—39+36—35+22+16+13—34—19. Ainsi on ne pourra prendre pour la 2.e verticale les différences de la 1.re horizontale de 1 à 15, et pour la 2.e les différences 1, 2, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, puisque 36 ou 35 s'y trouvent; et l'on aura pour 20 les combinaisons 27, 30....24, 30....

31, 33.... 36, 33.... 28, 35.... 32, 35.... 35, 35.... 24, 3.... 26, 32.... 26, 36.... 17, 26.

On agira de même pour les autres sommes 22, 24, etc.

On passera à la combinaison 1, 27, et l'on agira de même, et ainsi de suite, jusqu'à la combinaison 34, 31, puis on viendra à 3, 1; et, comme 3 a les n.os d'ordre 28, 32 et 35, et 1 les n.os 1, 9, 27, 31, on aura 28, 1.... 28, 9.... 28, 27.... 28, 31.... 32, 1.... 32, 9.... 32, 27.... 32, 31.... 35, 1.... 35, 9.... 35, 27.... 35, 31. On passera ensuite à 4, 2; enfin on épuisera toutes les combinaisons qui valent 2.

On examinera alors les autres nombres des premiers groupes; et, en suivant la marche ci-dessus, on obtiendra toutes les combinaisons propres aux deux horizontales choisies. Il est inutile de s'attacher ensuite aux nombres du 2.e groupe, et de rechercher ceux du premier, qui doivent déterminer les secondes verticales : car on retomberait sur des combinaisons déjà effectuées.

On voit l'immense variété de doubles bordures que fourniraient un carré central fixe et deux horizontales à volonté; mais on a donné l'énorme nombre qui représente le système de deux horizontales, et l'on peut prendre d'ailleurs d'autres progressions pour le carré central. C'est peut-être de toutes les formes de carré celle qui engendrerait le plus de combinaisons.

Il est bon de donner encore un exemple pour une bordure triple, et nous prenons le même carré de 9; nous conservons pour le carré central les 9 nombres du milieu; il reste 36 différences. On formera 3 horizontales à volonté. Il restera 9 différences qui doivent être celles du milieu

des 3 verticales. Ces différences peuvent se grouper 3 à 3 de 84 manières $=\frac{9\cdot8\cdot7}{1\cdot2\cdot3}$; mais elles se réduisent à 28 $=\frac{84}{3}$, puisqu'il y aura 3 groupes, et qu'ils rentreraient l'un dans l'autre. Pour les obtenir tous, on agira comme suit.

On formera tous les groupes de 3 différences dont l'une est fixe. Ainsi, ayant formé les 3 horizontales, par exemple :

$$40+39+26+16+5-38-36-34-18$$
$$35+33+30-24-22-19-14-12-7$$
$$32+31+28+21-29-27-23-20-13$$

Il reste les différences 6, 8, 9, 10, 11, 15, 17, 25, 37, ne faisant pas partie des horizontales. Que l'on prenne toutes celles où entre 6, par exemple ; on en aura 28 : car il restera 8 différences à prendre 2 à 2 ou $\frac{8\cdot7}{2}$. Cette série de différences formée, il reste 6 différences qui doivent se grouper 3 à 3. Qu'on ait de nouveau une différence fixe sur ces 6 : il faudra avoir sur les 5 restantes les combinaisons 2 à 2 ou $\frac{5\cdot4}{2}=10$. Ce serait la 2.e série répondant à la première. La 3.e série est déterminée par les 3 différences non employées : il est inutile de s'en occuper en conséquence. Ainsi il viendra 280 systèmes différens à former avec les 9 différences restantes. Voici les groupes de la 1.re série, et ceux de la 2.e qui y répondent.

6	8	9	6	9	10	6	10	15	6	11	37
6	8	10	6	9	11	6	10	17	6	15	17
6	8	11	6	9	15	6	10	25	6	15	25
6	8	15	9	9	17	6	10	37	6	15	37
6	8	17	6	9	25	6	11	15	6	17	25
6	8	25	6	9	37	6	11	17	6	17	37
6	8	37	6	10	11	6	11	25	6	25	37

6	8	9	10	11	15
			10	11	17
			10	11	25
			10	11	37
			10	15	17
			10	15	25
			10	15	37
			10	17	25
			10	17	37
			10	25	37

6	8	10	9	11	15
			9	11	17
			9	11	25
			9	11	37
			9	15	17
			9	15	25
			9	15	37
			9	17	25
			9	17	37
			9	25	37

6	8	11	9	10	15
			9	10	17
			9	10	25
			9	10	37
			9	15	17
			9	15	25
			9	15	37
			9	17	25
			9	17	37
			9	25	37

6	8	15	9	10	11
			9	10	17
			3	10	25
			9	10	37
			9	11	17
			9	11	25
			9	11	37
			9	17	25
			9	17	37
			9	25	37

6	8	17	9	10	11
			9	10	15
			9	10	25
			9	10	37
			9	11	15
			9	11	25
			9	11	37
			9	15	25
			9	15	37
			9	25	37

6	8	25	9	10	11
			9	10	15
			9	10	17
			9	10	37
			9	11	15
			9	11	17
			9	11	37
			9	15	17
			9	15	37
			9	17	37

6 8 37	9 10 11	6 9 15	8 10 11
	9 10 15		8 10 17
	9 10 17		8 10 25
	9 10 25		8 10 37
	9 11 15		8 11 17
	9 11 17		8 11 25
	9 11 25		8 11 37
	9 15 17		8 17 25
	9 15 25		8 17 37
	9 17 25		8 25 37
6 9 10	8 11 15	6 9 17	8 10 11
	8 11 17		8 10 15
	8 11 25		8 10 25
	8 11 37		8 10 37
	8 15 17		8 11 15
	8 15 25		8 11 25
	8 15 37		8 11 37
	8 17 25		8 15 25
	8 17 37		8 15 37
	8 25 37		8 25 37
6 9 11	8 10 15	6 9 25	8 10 11
	8 10 17		8 10 15
	8 10 25		8 10 17
	8 10 37		8 10 37
	8 15 17		8 11 15
	8 15 25		8 11 17
	8 15 37		8 11 37
	8 17 25		8 15 17
	8 17 37		8 15 37
	8 25 37		8 17 37

6 9 37	8	10	11
	8	10	15
	8	10	17
	8	10	25
	8	11	15
	8	11	17
	8	11	25
	8	15	17
	8	15	25
	8	17	25
6 10 11	8	9	15
	8	9	17
	8	9	25
	8	9	37
	8	15	17
	8	15	25
	8	15	37
	8	17	25
	8	17	37
	8	25	37
6 10 15	8	9	11
	8	9	17
	8	9	25
	8	9	37
	8	11	17
	8	11	25
	8	11	37
	8	17	25
	8	17	37
	8	25	37

6 10 17	8	9	11
	8	9	15
	8	9	25
	8	9	37
	8	11	15
	8	11	25
	8	11	37
	8	15	25
	8	15	37
	8	25	37
6 10 25	8	9	11
	8	9	15
	8	9	17
	8	9	37
	8	11	15
	8	11	17
	8	11	37
	8	15	17
	8	15	37
	8	17	37
6 10 37	8	9	11
	8	9	15
	8	9	17
	8	9	25
	8	11	15
	8	11	17
	8	11	25
	8	15	17
	8	15	25
	8	17	25

6 11 15	8	9	10
	8	9	15
	8	9	25
	8	9	37
	8	10	15
	8	10	25
	8	10	37
	8	15	25
	8	15	37
	8	25	37

6 11 17	8	9	10
	8	9	15
	8	9	25
	8	9	37
	8	10	15
	8	10	25
	8	10	37
	8	15	25
	8	15	37
	8	25	37

6 11 25	8	9	10
	8	9	15
	8	9	17
	8	9	37
	8	10	15
	8	10	17
	8	10	37
	8	15	17
	8	15	37
	8	17	37

6 11 37	8	9	10
	8	9	15
	8	9	17
	8	9	25
	8	10	15
	8	10	17
	8	10	25
	8	15	17
	8	15	25
	8	17	25

6 15 17	8	9	10
	8	9	11
	8	9	25
	8	9	37
	8	10	11
	8	10	25
	8	10	37
	8	11	25
	8	11	37
	8	25	37

6 15 25	8	9	10
	8	9	11
	8	9	17
	8	9	37
	8	10	11
	8	10	17
	8	10	37
	8	11	17
	8	11	37
	8	17	37

6 15 37	8	9	10
	8	9	11
	8	9	17
	8	9	37
	8	10	11
	8	10	17
	8	10	37
	8	11	17
	8	11	37
	8	17	37

6 17 37	8	9	10
	8	9	11
	8	9	15
	8	9	25
	8	10	11
	8	10	15
	8	10	25
	8	11	15
	8	11	25
	8	15	25

6 17 25	8	9	10
	8	9	11
	8	9	15
	8	9	37
	8	10	11
	8	10	15
	8	10	37
	8	11	15
	8	11	37
	8	15	37

6 25 37	8	9	10
	8	9	11
	8	9	15
	8	9	17
	8	10	11
	8	10	15
	8	10	17
	8	11	15
	8	11	17
	8	15	17

Il faut ajouter les différences des horizontales 2 à 2, en changeant un signe, et l'on aura 36 différenees de différences pour chaque horizontale.

Comme chaque verticale doit avoir une différence de différence de chaque horizontale, il faut prendre la somme de ces 3 différences de différences, et l'on aura 36^3 combinaisons.

Pour aller par ordre, on prendra une de ces différences de différences de la 1.re horizontale, et qui restera fixe,

on ajoutera ensuite chacune de celles de la 2.e horizontale avec toutes celles de la 3.e successivement, et celle fixe, et l'on aura 36 lignes de 36 nombres chacune; on prendra ensuite une autre différence de différence de la 1.re horizontale, et l'on agira comme ci-dessus, ce qui donnera 36 tableaux composés comme le premier.

On comparera l'une des sommes avec le nombre pareil qui résultera des différences de l'un des groupes de la 1.re série, et il viendra une verticale. On comparera une autre somme où n'entrent pas les différences de cette verticale, avec le nombre pareil résultant des différences d'un des groupes de la 2.e série correspondans au premier, et l'on aura la 2.e verticale. Enfin on mettra à part les différences de différences non employées, et l'on cherchera les sommes de trois de ces différences de différences prises, une de chaque horizontale; on comparera ces sommes avec le nombre pareil résultant des différences du groupe de la 3.e série déterminé par les deux précédens, ce qui donnera la 3.e verticale. Voici d'abord les différences de différences des horizontales.

1.re HORIZONTALE.

1	14	24	35	78	76	74	58	
40—39...	40—26...	40—16...	40—5...	40+38...	40+36...	40+34...	40+18......	(8)
13	23	34	77	75	73	57		
39—26...	39—16...	39—5...	39+38...	39+36...	39+34...	39+18..............		(15)
10	21	64	62	60	44			
26—16...	26—5...	26+38...	26+36...	26+34...	26+18.....................			(21)
11	54	52	50	34				
16—5...	16+38...	16+36...	16+34...	16+18.............................				(26)
43	41	39	23					
5+38...	5+36...	5+34...	5+18....................................					(30)
2	4	20						
38—36...	38—34...	38—18..						(33)
2	18							
36—34...	36—18..							(35)
16								
34—18...								(36)

2.e HORIZONTALE.

2	5	59	57	54	49	47	42	
35—33…	35—30…	35+24…	35+22…	35+19…	35+14…	35+12…	35+7. ….	(8)
3	57	55	52	47	45	40		
33—30…	33+24…	33+22…	33+19…	33+14…	33+12…	33+7. ………		(15)
54	52	49	44	42	37			
30+24…	30+22…	30+19…	30+14…	30+12…	30+7. ………			(21)
2	5	10	12	17				
24—22…	24—19…	24—14…	24—12…	24—7. ………				(26)
3	8	10	15					
22—19…	22—14…	22—12…	22—7. ………					(30)
5	7	12						
19—14…	19—12…	19—7. ………						(33)
2	7							
14—12…	14—7. ………							(35)
5								
12—7. ………								(36)

3.e HORIZONTALE.

1	4	11	61	59	55	51	45	
32—31	32—28	32—21	32+29	32+27	32+23	32+20	32+13	(8)
3	10	60	58	54	51	44		
31—28	31—21	31+29	31+27	31+23	31+20	31+13		(15)
7	57	55	51	48	41			
28—21	28+19	28+27	28+23	28+20	28+13			(21)
50	48	44	41	34				
21+29	21+27	21+23	21+20	21+13				(26)
2	6	9	16					
29—27	29—23	29—20	29—13					(30)
4	7	14						
27—23	27—20	27—13						(33)
3	10							
23—20	23—13							(35)
7								
20—13								(36)

Mettons ici les nombres qui expriment les différences de différences, et leurs numéros d'ordre.

1.re HORIZONTALE.

1 (31 34) 32 16 22 9 2 36 35
1 2 4 10 11 13 14 16 18..... (8)

33 17 (10 30) 3 (11 26) 4 29
20 21 23 24 34 35 39..... (15)

28 27 21 25 24 23 15 8 20 19 18
41 43 44 50 52 54 57 58 60 62 64.... (21)

14 7 13 6 12 5
73 74 75 76 77 78.

2.e HORIZONTALE.

(1 22 34) (9 27) (2 23 / 31 36) (32 35) 28 (24 29)(25 33) 30 26
2 3 5 7 8 10 12 15 17

21 15 (8 20) 19 14 (7 13) (6 18)
37 40 42 44 45 47 49

(12 17) (5 16) 11 (4 10) 3
52 54 55 57 59

3.ᵉ HORIZONTALE.

1	27	(9 34)	(2 31)	28	(16 32 / 36)	29
1	2	3	4	6	7	9

(10 35)	3	33	30	26
10	11	14	16	34

(21 25)	(15 24)	8	(20 23)
41	44	45	48

22	(14 19)	7	13	(6 18)	17	12	5	11	4
50	51	52	54	55	57	58	59	60	61

Soient pris les groupes 6 8 9... 10 11 15... 17 25 37
qui se correspondent :
Leurs différences sont 23 5 7 11...36 6 14 16...79 5 29 45

Qu'on veuille comparer la somme de 3 différences de différences prises, une de chaque horizontale, au 5 des différences du 1.ᵉʳ groupe de la 1.ʳᵉ série, et qu'on prenne 1, 2, 2 : le 1.ᵉʳ chiffre désigne le nombre de la 1.ʳᵉ horizontale, le second celui pris dans la 2.ᵉ, et le 3.ᵉ celui choisi dans la 3.ᵉ. Le premier n'est pas répété, le second l'est 3 fois, le 3.ᵉ ne l'est pas. On aura donc pour la 1.ʳᵉ verticale $40-39+35-33+29-27+9-6-8$.

On change les signes de $6+8-9=5$; ce qui fait voir qu'il est inutile de s'occuper des différences négatives : car la formation des lignes rectifie les suppositions positives, en indiquant les changemens de signes.

On pourrait encore avoir

40—39+24—22+29—27+9—6—8

ou bien 40—39+14—12+29—27+9—6—8

Conservons la 1.re verticale : ce qu'on va dire servira pour les deux autres. Que l'on veuille comparer 16 du 2.e groupe avec la somme des différences de différences prises dans les 3 horizontales, et qu'on choisisse 10, 2, 4: comme dans 10 ne se trouve ni 40 ni 39, et comme 4 ne contient ni 29 ni 27, on est obligé de prendre pour 2 l'une des combinaisons que nous avons laissées, savoir: 24—22 ou 14—12, puisque 35—33 fait partie de la verticale retenue. On aurait donc *10*=26—*16*... 2=24—22 ou *14*—12 (on retient la première différence), et 4=32—28. Il viendra alors pour 2.e verticale 26—16+24—22+32—28+10—11—15. Mettant à part les différences de différences non employées, et par ordre, on aura:

1.re horizontale...	43	41	39	23	2	4	20	2	18	16
2.e horizontale...	49	44	42	37	5	7	12	2	7	5
3.e horizontale...	10	54	51	44	44	41	34	3	10	7

Qu'on veuille avoir 79: puisque 43+2+34=79, on aura 43=5+38... 2=14—12... 34=21+13. Donc la 3.e verticale serait 5+38+14—12+21+13—17—25—37. On peut former les séries suivantes avec les différences restantes pour obtenir 5, 29, 45, 79, valeurs du 3.e groupe.

	—43+ 7+41=21+20+19—12—38— 5	
	—43+ 7+41=21+20+14— 7—38— 5	
	—41+49— 3=30+19+20—23—36— 5	
	41+ 5—41=36+ 5+19—14—21—20	
	—41+12+34=19— 7+21+13—36— 5	
(5)	—41+ 2+44=14—12+21+23—36— 5	+37—17—25
	41+ 5—41=36+ 5+12— 7—21—20	
	—39+37+ 7=30+ 7+20—13—34— 5	
	— 4+12— 3=19— 7+20—23—38+34	
	— 4+ 2+ 7=14—12+20—13—38+34	
	—41+ 2+44=14—12+31+13—36— 5	

	—23+49+ 3=30+19+23—20— 5—18	
	—23+42+10=30+12+31—21— 5—18	
	—23+42+10=30+12+23—13— 5—18	
	—20+42+ 7=18—38+30+12+20—13	
	—20+ 5+44=18—38+19—14+31+13	
(29)	—20+ 5+44=18—38+19—14+21+23	+25—17—37
	—20+ 5+44=18—38+12— 7+31+13	
	—20+ 5+44=18—38+12— 7+21+23	
	—18+44+ 3=18—36+30+14+23—20	
	—18+37+10=18—36+30+ 7+31—21	
	—18+37+10=18—36+30+ 7+23—13	
	—16+42+ 3=18—34+30+12+23—20	

(45)

—43+44+44=30+14+31+13—38— 5

—43+44+44=30+14+21+23—38— 5

—43+37+51=30+ 7+31+20—38— 5

—41+42+44=30+12+31+13—36— 5

—41+42+44=30+12+21+23—36— 5

— 2+44+ 3=30+14+23—20+36—38

— 2+37+10=30+ 7+31—21+36—38

— 2+37+10=30+ 7+31—21+34—36

— 4+42+ 7=34—38+30+12+20—13

— 4+ 5+44=34—38+19—14+31+13

— 4+ 5+44=34—38+19—14+21+23

— 4+ 5+44=34—38+12— 7+31+13

— 4+ 5+44=34—38+12— 7+21+23

— 2+44+ 3=30+14+23—10+34—36

— 2+37+10=30+ 7+23—13+36—38

— 2+37+10=30+ 7+23—13+34—36

—18+12+51=18—36+19— 7+31+20

—16+ 7+54=18—34+19—12+31+23

—16+ 7+54=18—34+14— 7+31+23

+17—25—37

(79)

43+ 2+34 = 38+ 5+14—12+21+13

23+49+ 7 = 18+ 5+30+19+20—13

23+ 5+51 = 18+ 5+19—14+31+20

23+12+44 = 18+ 5+19— 7+31+13

23+12+44 = 18+ 5+19— 7+21+23

23+ 2+54 = 18+ 5+14—12+31+23

23+ 5+51 = 18+ 5+12— 7+31+20

20+49+10 = 38—18+30+19+31—21

20+49+10 = 38—18+30+19+23—13

20+ 5+54 = 38—18+19—14+31+23

20+ 5+54 = 38—18+12— 7+31+23

18+ 7+54 = 36—18+19—12+31+23

18+ 7+54 = 36—18+14— 7+31+23

16+12+51 = 34—18+19— 7+31+20

+25+17+37

On voit que, pour la 1.re verticale, ayant choisi une des manières d'avoir 5, qui est l'une des valeurs des différences du 1.er groupe; et pour la 2.e verticale l'une des manières de faire 16, qui est l'une de ces valeurs du 2.e groupe, on aurait 56 troisièmes verticales. Comme parmi les différences restantes on a 2 répété à la 1.re horizontale, 7 et 5 à la 2.e, et 44 à la 3.e, il suit qu'on aura des différences qui paraîtront les mêmes, mais qui, développées, sont différentes.

Pour une bordure quadruple de 11, par exemple, il resterait 12 différences qui donneraient $\frac{12\cdot11\cdot10}{1\cdot2\cdot3}$, dont il faudrait prendre le quart, qui serait=55. On supposera donc une différence fixe, et l'on combinera les 11 autres 2 à 2. Cela fait, il restera 9 différences, qui, avec une fixe, donneront 28 combinaisons 2 à 2 par les 8 restantes : ainsi chacune des 55 aura 28 groupes. Les 6 différences restantes 2 à 2, l'une restant fixe, donneront 10 groupes pour chacun des 28 : ainsi en totalité il viendra $55\cdot28\cdot10$; car les quatrièmes groupes sont déterminés. Ce seront 15400 groupes différens. On prendra 4 horizontales à volonté sur celles qui restent, le carré central formé : ainsi, pour le carré de 11 à quadruple bordure, qu'on choisisse 4 horizontales faites avec les 56 différences de 5 à 60, par exemple:

5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16, différences restantes.

8 12 13... 5 6 11... 7 10 15... 9 14 16

33 7 9 17...22 0 10 12...32 2 12 18...39 7 11 21

$$\overset{+}{60}+\overset{+}{59}+\overset{+}{58}+\overset{+}{57}+\overset{+}{56}-55-54-53-52-51-25$$

$$\overset{+}{50}+\overset{+}{49}+\overset{+}{48}+\overset{+}{47}+\overset{+}{46}-\overset{+}{45}-44-43-42-40-26$$

$$\overset{+}{41}+\overset{+}{39}+\overset{+}{38}+\overset{+}{37}+36-35-\overset{+}{34}-33-32-\overset{+}{30}-27$$

$$\overset{+}{22}+\overset{+}{29}+\overset{+}{28}+\overset{+}{24}+23-31-\overset{+}{21}-20-19-18-\overset{+}{17}$$

60—59+50—49+41—39+29—24 (+12— 8—13) 1.re v.
58—57+48—47+34—30+22—28 (+11— 5— 6) 2.e v.
56+52—46—45—38+37—21+17 (+10— 7—15) 3.e v.
51—25+44—43+33—32+31—20 (— 9—14—16) 4.e v.

On peut mettre un signe sur les différences à mesure qu'on les emploie, comme on le voit ci-dessus.

Cette manière d'opérer suffit lorsqu'on ne veut que former rapidement la bordure quadruple.

Si l'on voulait bordure triple au carré de 13, et que le carré central fût de 77, il resterait 21 différences à grouper par 7. On aurait en tout 84 différences, non compris le moyen. Le carré central en prenant 24, il en reste 60.

Que le carré central soit composé des progressions suivantes :

28·31·34·37·40·43·46
44·47·50·53·56·59·62
60·63·66·69·72·75·78
76·79·82·85·88·91·94
92, etc.

Les différences des nombres employés sont, savoir :

57 54 53 48 45 42 39.....41 38 35 32 29 26 23....
25 22 19 16 13 10. 7.....9 6 3 0.

Il reste

1 2 4 5 8 11 12 14 15 17 18 20 21 24 27 28 30 31
33 34 36 37 40 43 44 46 47 49 50 52 53 55 56 58
59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74
75 76 77 78 79 80 81 82 83 84.

Soient formées 3 horizontales,

84+83+82+81—56—55—53—52—31—30—21—20—12
80+79+78+77+76+75—74—73—72—71—70—69—36
68+67+66+65+64—63—62—61—60—59—15— 8— 2

Il reste les 21 différences

1 4 5 11 14 17 18 24 27 28 33 34 37 40 43 44 46
47 49 50 58.

Ces différences doivent être groupées 7 par 7.

Ce qui donnera $\frac{21\cdot20\cdot19\cdot18\cdot17\cdot16\cdot15}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}=3\cdot8\cdot15\cdot17\cdot19$, dont il faut prendre le tiers : reste $8\cdot15\cdot17\cdot19=38760$.

C'est le nombre de combinaisons qu'on obtient en calculant 20 différences 6 à 6, une 21.e restant fixe. Il en reste 14 à calculer 7 à 7, ce qui donne $\frac{14\cdot13\cdot12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}=24{,}11\cdot13$, dont il faut prendre la moitié. Reste $11\cdot12\cdot13=1716$. C'est le nombre de différences qu'on aura en

prenant une d'elles fixe, et calculant 6 à 6 les 13 restantes. La 3.e série est déterminée : on aura donc 38760·1716 groupes triples se correspondant=66512160. On voit avec quelle rapidité augmentent ces combinaisons d'après le nombre de cases du carré central. On a toujours autant de séries qu'il y a d'unités dans le numéro de la bordure, multipliées par la racine du carré central. Ici la bordure est triple, et le carré central a 7 pour racine : donc 3·7, différences restantes.

Prenons au hasard les 3 groupes correspondans, 17, 24, 27, 33, 34, 37, 43... 1, 4, 5, 18, 49, 50, 58... 11, 14, 28, 40, 44, 46, 47.

On aurait les différences de ces groupes en prenant leur somme, en ôtant une différence, puis 2, et enfin 3 : ce qui donnerait pour les combinaisons de chaque groupe, d'abord 8 pour la somme des 7 différences et la soustraction de l'une d'elles ; ensuite 21 pour la soustraction de 2 différences des 5 autres ; enfin 35 pour la soustraction de 3 de ces différences des 4 autres : en tout 64 par groupe. Prenons pour le premier, au hasard, 37+24 +27+33—34—17—43=27;

On peut prendre 52—30=22.....73—69=4...... 68—67=1 pour les différences de différences des 3 horizontales ;

Et l'on aura, 1.re verticale, 52—30+73—69+68—67 (+34+17+43—37—24—27—33); et l'on marquera les différences employées.

Que l'on choisisse dans le 2.e groupe 1+4+5+18+49 +50—58=69, et que l'on choisisse 56—20=36..... 70—36=34.....59—60=—1. On aura :

2.e verticale, 56—20+70—36+59—60 (+58—1—4 —5—18—49—50), et qu'on marque ces différences dans les horizontales.

Venant au 3.e groupe correspondant aux deux premiers, qu'on prenne 11+14+28+44+40—46—47=44 : on pourra faire la 3.e verticale par 75+72—84—12+8—15 (+46+47—11—14—28—40—44).

On voit avec quelle facilité on arrive à former les verticales : cela tient à la multitude de combinaisons dont sont susceptibles les sommes de différences de différences des horizontales : car ici l'on a pris au hasard.

Un dernier exemple sur un carré pair, et qu'on veuille bordure triple au carré de 12, le central étant celui de 6, par les progressions

8 . 10 . 12 . 14 . 16 . 18
31 . 33 . 35 . 37 . 39 . 41
54 . 56 . 58 . 60 . 62 . 64
81 . 83 . 85 . 87 . 89 . 91
104 . 106 . 108 . 110 . 112 . 114
127 . 129 . 131 . 133 . 135 . 137

les différences restantes seront celles de 1 à 7; puis celles de 9, 11, 13, 15, 17; puis de 19 à 30; celles de 32, 34, 36, 38, 40; ensuite de 42 à 53; puis de 55, 57, 59, 61, 63; enfin de 65 à 72. Chaque couple vaut 145; et un demi, 72, 5 : ce qui donne les différences suivantes :

71,5	67,5	61,5
70,5	66,5	59,5
69,5	65,5	57,5
68,5	63,5	55,5

53,5	36,5	19,5
52,5	34,5	17,5
51,5	32,5	15,5
50,5	30,5	13,5
49,5	29,5	11,5
48,5	28,5	9,5
47,5	27,5	7,5
46,5	26,5	6,5
45,5	25,5	5,5
44,5	24,5	4,5
43,5	23,5	3,5
42,5	22,5	2,5
40,5	21,5	1,5
38,5	20,5	0,5

En tout, 54 différences : car la triple bordure donne $\frac{44+36+28}{2}=54$.

HORIZONTALES.

71,5+70,5+69,5+68,5+67,5—66,5—65,5—63,5—61,5—59,5—25.5— 5,5
57,5+55,5+53,5+52,5—51,5—50,5—49,5—20,5—19,5—17,5— 9,5— 0,5
48,5+47,5+46,5+30,5+29,5+28,5—45,5—44,5—43,5—42,5—32,5—22,5

On peut faire

33 par 65,5—63,5+49,5—17,5+43,5—44,5
23 par 71,5+59,5—19,5+ 0,5—46,5—42,5
3 par 70,5—69,5+51,5—50,5+48,5—47,5

Et l'on aura les verticales

65,5—63,5+49,5—17,5+43,5—44,5(+40,5— 1,5—2,5—11,5—23,5—34,5)
71,5+59,5—19,5+ 0,5—46,5—42,5(+26,5+ 7,5—3,5—13,5—15,5—24,5)
70,5—69,5+51,5—50,5+48,5—47,5(+38,5+27,5—4,5— 6,5—21,5—36,5)

Les différences restantes sont :

1,5	11,5	26,5
2,5	13,5	27,5
3,5	15,5	34,5
4,5	21,5	36,5
6,5	23,5	38,5
7,5	24,5	40,5

Qu'on prenne les groupes

$$1,5+2,5+11,5+23,5+34,5-40,5=33$$
$$3,5+13,5+15,5+24,5-7,5-26,5=23$$
$$4,5+6,5+21,5+36,5-27,5-38,5=3$$

On voit avec quelle facilité, pour un cas compliqué, on arrive aux trois verticales.

§ 4.

PROGRESSIONS GÉOMÉTRIQUES ET HARMONIQUES.

Il faut, pour un carré formé avec une progression géométrique, que le produit des nombres de chaque ligne soit le même. Ces carrés se composent comme ceux des progressions arithmétiques; les exposans remplacent les différences. On peut aussi les former au moyen de tableaux. Soit le carré de 3 à composer. La progression étant 1:2:4:8:16:32:64:128:256, l'unité est le premier terme, la raison est 2, et la progression peut s'écrire de cette autre manière : $2^0:2^1:2^2:2^3:2^4:2^5:2^6:2^7:2^8$; le premier tableau aura donc 0 pour le premier exposant, puisque $2^0=1$, et les tableaux seront, par exemple,

1.er TABLEAU.	2.e TABLEAU.	SOMME DES EXPOSANS.
0 2 1	3 0 6	3 2 7
2 1 0	6 3 0	8 4 0
1 0 2	0 6 3	1 6 5

On voit que la somme des exposans est 12 dans tous les sens : on aura donc le carré (*planche* XXIII, *figures* 125 et 126).

Soit encore à former le carré de 5.

On aura, pour composer le premier tableau, les nombres 0, 1, 2, 3, 4, et pour le second 0, 5, 10, 15, 20, en supposant toujours la progression par 2, et le premier terme = 1 : il viendra donc, par exemple, les tableaux :

1.er TABLEAU.	2.e TABLEAU.	SOMME DES EXPOSANS.
3 1 4 0 2	10 0 15 5 20	13 1 19 5 22
0 2 3 1 4	15 5 20 10 0	15 7 23 11 4
1 4 0 2 3	20 10 0 15 5	21 14 0 17 8
2 3 1 4 0	0 15 5 20 10	2 18 6 24 10
4 0 2 3 1	5 20 10 0 15	9 20 12 3 16

On verra le carré (*figures* 127 et 128, *planche* XXIII).

La somme des exposans $= \frac{(24+1)\,24}{2\cdot5} = 5\cdot12 = 60$: car, puisque le premier exposant est 0, on ne doit compter que 24 termes au lieu de 25. On pourrait cependant écrire $\frac{(24+0)\,25}{2\cdot5}$; ce serait la même chose.

On voit enfin (*Figures* 129 et 130, *planche* XXIII) le carré de 4 fait par la méthode expéditive.

Comme les progressions géométriques fournissent des termes qui croissent avec rapidité, on ne poussera pas plus loin les raisonnemens sur les carrés géométriquement

construits. Il suffisait de montrer qu'il ne se présente aucune difficulté à former ce genre de carrés, puisqu'on agit sur les exposans comme sur les nombres simples, et que l'on a donné des règles pour ceux-ci, règles entièrement applicables aux carrés en progressions géométriques.

Passons aux progressions harmoniques.

On a dit qu'une proportion harmonique est celle qui est formée avec quatre nombres tels que le premier soit au quatrième comme la différence des deux premiers à la différence des deux derniers.

Si la proportion est continue, on doit avoir : le premier est au troisième comme la différence du premier au second est à la différence du second au troisième. Ainsi 420, 360, 315, sont en proportion harmonique continue.

La progression harmonique est celle dans laquelle trois termes consécutifs jouissent de la propriété ci-dessus. Ainsi soient trois termes a, b, c de suite : on aura $a : c :: a-b : b-c$. D'où l'on tire $ab-ac=ac-bc$ et $ab=2ac-bc=c(2a-b)$: donc $c=\frac{ab}{2a-b}$. De même $a=\frac{cb}{2c-b}$, ou l'un des extrêmes est égal au produit du moyen par l'autre extrême, produit divisé par la différence entre le double de cet autre extrême et le moyen. Si l'on demande celui-ci, les extrêmes étant connus, puisque $ab=2ac-bc$, on aura $ab+bc=2ac$, et $b=\frac{2ac}{a+c}$, ou bien le moyen est égal au double produit des extrêmes divisé par la somme de ces extrêmes.

Les nombres dits harmoniques n'ont aucun rapport avec les nombres en proportion ou progression harmonique. Les premiers ont cette curieuse propriété, d'être

égaux à la somme de leurs diviseurs, l'unité comprise dans cette somme. Ainsi $6=1+2+3$; de même $28=1+2+4+7+14$. Ces nombres sont rares, et difficiles à trouver.

Quant aux progressions harmoniques, voici les propriétés utiles pour le but qu'on se propose ici :

1.° On peut multiplier les trois termes d'une proportion harmonique continue par un même nombre, et le résultat est encore harmonique. Ainsi, puisque l'on a $a : c :: a-b : b-c$, il vient aussi $an : cn :: an-bn : bn-cn$, ou encore, en divisant les deux termes du premier rapport $a : c :: n(a-b) : n(b-c)$: on peut donc aussi diviser les trois termes par un même nombre, ou seulement les deux extrêmes. Cette observation est utile pour éliminer les fractions.

2.° On peut multiplier ou diviser tous les termes d'une progression harmonique par un même nombre : ce qui donne le moyen de faire disparaître les fractions.

3.° Lorsqu'on a une progression harmonique, elle conserve sa propriété, en supprimant dans cette progression tant de termes intermédiaires que l'on voudra, mais à des intervalles égaux. Ainsi, ayant la progression $\frac{1}{1} : \frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4} : \frac{1}{5}$, etc. laquelle est la plus simple des progressions harmoniques, on aurait encore les progressions $\frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{6} : \frac{1}{8}$, etc., comme aussi $\frac{1}{1} : \frac{1}{4} : \frac{1}{7} : \frac{1}{10}$, etc.; et de même on peut insérer d'autres termes entre ceux d'une progression, si les intervalles sont égaux. Ainsi la première $\frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{6} : \frac{1}{8}$ peut devenir $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4} : \frac{1}{5} : \frac{1}{6}$.

Soit donc la progression $\frac{1}{1} : \frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4} : \frac{1}{5} : \frac{1}{6} : \frac{1}{7} : \frac{1}{8} : \frac{1}{9}$; et que l'on veuille éliminer les fractions : pour cela on remarque que le plus grand diviseur pair est 8, et le plus grand diviseur

impair 9. Leur produit 72 se divise par 2, 3, 4, 6, 8, 9. Il reste 5 et 7, dont le produit est 35. Si donc on multiplie 72 par 35, on aura 2520 pour le plus petit nombre divisible par tous les dénominateurs. Ce sera la valeur du 1.er terme de la progression; les autres seront, en divisant 2520 par 2, par 3, par 4, par 5, etc., savoir :

2520 : 1260 : 840 : 630 : 504 : 420 : 360 : 315 : 280.

Et cette dernière progression peut remplacer celle donnée. Trois des termes, par exemple, 630, 504, 420, donneraient 63 : 42 :: 126 : 84, ou 3 : 2 :: 21 : 14 :: 3 : 2.

Il est facile maintenant de faire le carré magique harmonique : il suffit d'écrire de suite les nombres ci-dessus (*figure* 131, *planche* XXIII).

On peut aussi placer de suite les fractions sans réduire (*figure* 133, *planche* XXIII).

Il n'est pas nécessaire que les nombres soient en horizontale : on les a mis en verticale à la figure.

Pour la réduction des fractions au même dénominateur dans la progression $\frac{1}{1} : \frac{1}{2} : \frac{1}{3} \ldots \frac{1}{15} : \frac{1}{16}$, le produit de 15 par 16 = 240; or 240 est divisible par 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16. Reste 7, 9, 11, 13, 14; mais il ne faut pas comprendre 14, puisque 14 = 2, 7, et qu'on va conserver le multiple 7; de même 9 = 3 · 3 ne doit être pris ici que pour 3, puisque 240 est déjà divisible par 3. Ainsi l'on aura 7, 3, 11, 13, dont le produit est 3003, lequel, multiplié par 240, donne 720720 pour le plus petit nombre divisible par tous les dénominateurs : on aura donc, en effectuant ces divisions, les nombres

720720, 360360, 240240, 180180, 144144, 120120, 102960,

90090, 80080, 72072, 65520, 60060, 55440, 51480, 48048, 45045 (*figure* 132, *planche* XXIII).

Si l'on veut vérifier une diagonale, on aura $1 : \frac{1}{11} :: 1 - \frac{1}{6} : \frac{1}{6} - \frac{1}{11}$, ou $11 : 1 :: \frac{5}{6} : \frac{5}{11 \cdot 6} :: \frac{1}{6} : \frac{1}{11 \cdot 6} :: 11 : 1$. Il suffit, pour qu'il y ait progression harmonique, que la série de fractions ait le même numérateur, et que les dénominateurs suivent une progression arithmétique. En effet, soient trois termes : $\frac{a}{b} : \frac{a}{b+d} : \frac{a}{b+2d}$: on aura $\frac{a}{b} : \frac{a}{b+2d} :: \frac{a}{b} - \frac{a}{b+d} : \frac{a}{b+d} - \frac{a}{b+2d}$, ou $b+2d : b :: \frac{ad}{b(b+d)} : \frac{ad}{(b+d)(b+2d)} :: \frac{1}{b} : \frac{1}{b+2d} :: b+2d : b$. Ainsi on choisira une série de fractions ayant même numérateur, et des dénominateurs faisant une progression arithmétique; et, comme on peut diviser tous les termes par un même nombre, l'unité sera le numérateur commun; on pourra, si l'on veut, chasser les fractions, et il viendra une progression harmonique. Par exemple, soit encore $\frac{1}{5} : \frac{1}{8} : \frac{1}{11} : \frac{1}{14} : \frac{1}{17} : \frac{1}{20} : \frac{1}{23} : \frac{1}{26} : \frac{1}{29}$. Les nombres premiers qui entrent ici sont 5, 11, 17, 23, 29, 7, 13, 2; mais 8 ne diviserait pas le produit de ces nombres : il faut faire le produit des nombres 5, 7, 8, 11, 13, 17, 23, 29. Ce sera le plus petit nombre divisible par tous les dénominateurs. Ce plus petit nombre serait considérable, et $= 454013560$: ainsi la série de fractions donnerait 454013560 à diviser successivement par 5, 8, 11, etc. : d'où l'on tirerait

90802712, 56751695, 41273960, 32429540, 26706680, 22700678, 19733720, 17462060, 15655640, pour la progression harmonique.

Ce genre de carrés est le plus facile de tous à composer:

il ne faut ni tableaux, ni attention; mais il n'est pas susceptible des modifications des carrés construits avec des nombres en progression arithmétique; il ne pourrait avoir de bordures, ni autres formes que celles données.

Les progressions géométriques sont susceptibles de bordures. Par exemple, le carré de 5 donnerait, en prenant les neuf nombres du milieu, 2^8, 2^9, 2^{10}, 2^{11}, 2^{12}, 2^{13}, 2^{14}, 2^{15}, 2^{16}, pour le carré central, et arrangeant ces nombres par la méthode expéditive du carré de 3, celui qu'on voit (*planche* XXIII, *figure* 127 *bis*). Maintenant les 8 nombres restans, et leurs complémens d'exposans, seraient, en supprimant la base 2 :

0	1	2	3	4	5	6	7
24	23	22	21	20	19	18	17

La première horizontale peut être, chaque couple valant $0+24=24$, composée par $19+20+17+1+3=60$, et la première verticale par les restans, plus un exposant et le complément d'un autre, comme

$$19+18+2+0+21=60.$$

Il est inutile d'insister davantage sur ces genres de carrés. Ce qui vient d'être dit, suffit pour lever toute difficulté. La théorie que l'on vient d'exposer peut être regardée comme neuve, les auteurs ayant à peine effleuré la question.

§ 5.

CROIX.

Voici d'autres manières de composer les carrés, comprises dans ce paragraphe et les suivans. On doit encore

considérer ces nouvelles compositions comme une théorie nouvelle, un seul auteur, Sauveur, ayant annoncé, dans son Traité, la possibilité de partager un carré au moyen de croix et de châssis, mais sans entrer dans aucun détail, et n'ayant dit qu'un mot sur une seule espèce de croix. On va s'étendre au long sur cette matière, puisqu'elle n'a été développée par personne.

On distinguera trois espèces de croix, savoir : 1.° celles qui partagent un carré magique en quatre parties étant chacune carré magique ; 2.° celles qui, sans avoir la propriété précédente, partagent le carré de sorte que les 4 parties réunies forment un carré magique ; 3.° les fausses croix, qui partagent inégalement le carré. On va s'occuper successivement des deux premiers genres de croix. On parlera plus tard des fausses croix.

PREMIÈRE SECTION.

LA CROIX DIVISE LE CARRÉ EN 4 CARRÉS MAGIQUES ÉGAUX.

CHAPITRE PREMIER.

LES CROIX ONT LEURS BRANCHES COMPOSÉES DE LIGNES EN NOMBRE PAIR.

ARTICLE PREMIER.

CARRÉ DE 10.

Il est d'abord évident que les carrés partiels, et par conséquent le carré total, doivent être à racine paire : autrement on ne pourrait avoir 4 carrés égaux, puisque 4

nombres ne peuvent s'arranger magiquement, à moins qu'ils ne soient les mêmes. D'où il suit que le plus petit nombre susceptible d'être partagé par une croix, a 10 pour racine, les branches étant composées de deux lignes. On a choisi, pour les carrés partiels, les 8 premiers et les 8 derniers nombres pour l'un d'eux; les 8 suivans et les 8 précédant les derniers pour un autre, et ainsi de suite. On a réservé les 36 nombres intermédiaires pour la croix. Pour faire cette croix, on formera la 1.re horizontale et la 1.re verticale à l'ordinaire, comme pour une bordure; les complémens se placent en face de leurs nombres. Quant à l'intersection des branches, les complémens seront en diagonale, comme pour les angles des bordures. Il est toujours plus commode d'opérer par les différences.

La 1.re horizontale peut être...... $\begin{cases} 17{,}5-16{,}5+15{,}5+13{,}5+\ 1{,}5-14{,}5 \\ -6{,}5-5{,}5-4{,}5-0{,}5 \end{cases}$

La 1.re verticale... $\begin{cases} 17{,}5+16{,}5+12{,}5+\ 3{,}5-11{,}5-10{,}5 \\ -9{,}5-8{,}5-7{,}5-2{,}5 \end{cases}$

Reste à substituer les nombres aux différences. Il est clair que les différences communes sont à l'intersection de la croix (*fig.* 134, *pl.* XXIII). On s'est dispensé d'écrire les différences dans le carré.

On aurait pu choisir les 64 nombres du milieu pour les carrés partiels, et les 36 restans pour la croix. Il y aurait encore beaucoup d'autres progressions, même interrompues; et l'on en verra des exemples; mais elles pourraient ne pas être arbitraires, et l'on verra les moyens de reconnaître si elles sont susceptibles de convenir à la question.

ARTICLE II.

CARRÉ DE 12.

Comme 10 ne peut se partager en 2 parties paires, il suit que le carré de 12 aura nécessairement une croix dont chaque branche sera composée de quatre lignes.

Soient prises, pour les carrés partiels, les progressions suivantes. Il faut que deux de ces progressions, pour chaque carré, soient complémens des deux autres; et, si l'on ne prend que deux progressions, que l'une soit complément de l'autre.

7 .	9 .	11 .	13	2 .	3 .	4 .	5
18 .	20 .	22 .	24	27 .	28 .	29 .	30
121 .	123 .	125 .	127	115 .	116 .	117 .	118
132 .	134 .	136 .	138	140 .	141 .	142 .	143

1 .	12 .	23 .	34	50 .	53 .	56 .	59
15 .	26 .	37 .	48	61 .	64 .	67 .	70
97 .	108 .	119 .	130	75 .	78 .	81 .	84
111 .	122 .	133 .	144	86 .	89 .	92 .	95

On voit que les différences des progressions pour chaque carré, ainsi que les intervalles entre ces progressions, sont très-différens. Il faut présenter le tableau des différences restantes, lesquelles doivent servir à composer les branches de la croix.

6 + 66,5 — 139	16 + 56,5 — 129
8 + 64,5 — 137	17 + 55,5 — 128
10 + 62,5 — 135	19 + 53,5 — 126
14 + 58,5 — 131	21 + 51,5 — 124

25 + 47,5 — 120	49 + 23,5 — 96
31 + 41,5 — 114	51 + 21,5 — 94
32 + 40,5 — 113	52 + 20,5 — 93
33 + 39,5 — 112	54 + 18,5 — 91
35 + 37,5 — 110	55 + 17,5 — 90
36 + 36,5 — 109	57 + 15,5 — 88
38 + 34,5 — 107	58 + 14,5 — 87
39 + 33,5 — 106	60 + 12,5 — 85
40 + 32,5 — 105	62 + 10,5 — 83
41 + 31,5 — 104	63 + 9,5 — 82
42 + 30,5 — 103	65 + 7,5 — 80
43 + 29,5 — 102	66 + 6,5 — 79
44 + 28,5 — 101	68 + 4,5 — 77
45 + 27,5 — 100	69 + 3,5 — 76
46 + 26,5 — 99	71 + 1,5 — 74
47 + 25,5 — 98	72 + 0,5 — 73

Soient les deux verticales à volonté : les horizontales auront de chaque verticale deux différences, dont l'une avec changement de signe. On peut faire ces lignes par les différences que voici :

1.re verticale... { 58,5—47,5+66,5—40,5+64,5+62,5
—41,5—39,5—26,5—25,5—23,5—7,5

2.e verticale... { —37,5+56,5—30,5+55,5+53,5+51,5
+12,5—34,5—33,5—32,5—31,5—29,5

1.re horizontale. { 58,5+47,5—37,5—56,5+36,5+28,5
+17,5—27,5—21,5—20,5—18,5—6,5

2.e horizontale. { 66,5+40,5—30,5—55,5+14,5+4,5
+0,5—15,5—10,5—9,5—3,5—1,5

Substituant les nombres aux différences, et faisant at-

tention aux différences communes pour l'intersection de la croix, on aura le carré (*figure* 135, *planche* XXIII.)

Il n'y a d'attention à apporter que pour les différences d'intersection, et encore pour celles seulement dont le signe est changé. En effet, si l'on examine d'abord les différences dont le signe est le même, on verra que la 1.re horizontale aura 58,5 et — 37,5, communes à la 1.re et à la 2.e verticale : donc les nombres 14 et 110, qui y répondent, ont leurs places forcées. De même la 2.e horizontale aura 66,5 et — 30,5 communs avec la 1.re et avec la 2.e verticale : donc les nombres 6 et 103, qui répondent à ces différences, auront aussi leurs places forcées. Les cases symétriques recevront les complémens de ces 4 nombres.

Quant aux différences à signes contraires, la 1.re verticale ayant — 47,5, et la 1.re horizontale + 47,5; les nombres 120 et 25, qui répondent à ces différences, sont complémens l'un de l'autre; mais la 4.e verticale doit contenir les complémens de la 1.re, comme la 3.e ceux de la 2.e : donc la 4.e verticale doit contenir 25; mais la 1.re horizontale doit également avoir 25 : ainsi ce nombre est à l'intersection de la 1.re horizontale et de la 4.e verticale, et 120 sera à la case symétrique correspondante à 25. On peut encore conclure de ce que la 4.e horizontale doit renfermer les complémens de la 1.re, que 120 doit être à l'intersection de la 1.re verticale et de la 4.e horizontale. La 2.e verticale ayant + 56,5, et la 1.re horizontale — 56,5, les nombres 16 et 129, répondant à ces différences, doivent se placer symétriquement; or la 1.re horizontale et la 2.e verticale n'ont qu'une seule case symétrique l'une à l'autre : ainsi les nombres 16 et 129 sont à la 3.e case de la 1.re horizon-

tale de l'intersection, et à la 4.e de la 2.e verticale. La 1.re verticale ayant — 40,5 et la 2.e horizontale + 40,5, les nombres 113 et 32, répondant à ces différences, seront placés à la 3.e case de la 1.re verticale et à la 4.e case de la 2.e horizontale, ces deux cases étant les seules symétriques dans ces deux lignes. Enfin la 2.e verticale ayant + 55,5, et la 2.e horizontale — 55,5, les nombres 17 et 128 seront en diagonale.

On voit donc qu'on n'est réellement obligé d'avoir égard qu'aux nombres répondant aux différences dont le signe change : ainsi la 1.re horizontale ne coupe la 1.re verticale qu'à la case où est 14; mais elle coupe la 4.e verticale, qui contient les complémens de la 1.re, à la case où est 25; et ainsi des autres.

Quant à l'ordre des autres nombres en horizontale et en verticale, il est arbitraire ; les deux autres horizontales et les deux autres verticales, dont on n'a pas calculé les différences, comprennent les complémens des premières.

ARTICLE III.

LA CROIX A BRANCHES COMPOSÉES D'UN NOMBRE PAIR DE LIGNES PEUT SE FORMER EN BORDURE, ET RÉCIPROQUEMENT.

Pour changer les bordures en croix, il faut, 1.° que le nombre des bordures soit pair; 2.° que le carré central soit composé de 4 carrés égaux. Ainsi, ces deux conditions devant avoir lieu simultanément, il y a peu de bordures dont on puisse faire des croix; mais les croix à branches paires (ici l'on dit, par abréviation, branches paires pour branches composées d'un nombre pair de bandes ou de lignes) se

transforment facilement en bordures : il suffit de joindre les 4 carrés partiels pour n'en faire qu'un à compartiment, et de placer par ordre les 4 parties de l'intersection de la croix aux angles de la bordure. Alors la moitié des horizontales sera portée au dessus, et l'autre moitié au dessous du carré central; la moitié des verticales à gauche, et l'autre moitié à droite de ce même carré : les bordures seront faites. Mais il est à remarquer qu'il n'y aura jamais qu'une seule bordure, laquelle sera double, triple, etc. On voit (*figures* 134, 136, *planche* XXIII) que la croix de 10 est changée en bordure. On a renversé cette bordure, ce qui est indifférent. On verra la bordure double qui résulterait du changement de la croix de la figure 135 en bordure (*planche* XXIII *bis*, *figure* 1).

On a dû remarquer, dans la croix du carré de 12 (*figure* 135, *planche* XXIII), que l'intersection des branches ne donnait que les diagonales exactes; les autres lignes du carré d'intersection ont plus ou moins de deux couples, ou plus ou moins que 290 : c'est en quoi ce carré de 16 cases diffère des carrés ordinaires; mais il suffit que les diagonales soient exactes pour que le carré soit magique, puisque les horizontales et les verticales ont la somme exigée, ainsi que les parties de la croix entre les carrés partiels, dont deux lignes sont complémens des deux autres. On voit dans la bordure double ci-dessus avec quelle facilité l'on passe de la croix à la bordure : il en est de même dans les autres cas.

ARTICLE IV.

DU NOMBRE DE LIGNES DONT LES BRANCHES PEUVENT ÊTRE COMPOSÉES.

Puisque les carrés partiels doivent avoir une racine paire, elle peut être $=2n$, n étant plus grand que l'unité, puisque 2 ne peut s'arranger magiquement; et si a désigne les lignes d'une branche de croix, la racine du carré total sera $4n+a$, a étant >1, puisqu'on ne peut avoir de branches de croix d'une seule bande.

Soit maintenant $n=2=3=4=5=6$, etc., et $a=2$: il viendra 10, 14, 18, 22, etc., de 4 en 4 : d'où il suit que 10 est le plus petit nombre qui puisse avoir une croix.

Soit $a=3$: on aura 11, 15, 19, 23, 27, etc., aussi de 4 en 4 : ainsi 11 est le plus petit nombre impair qui puisse avoir une croix. Soit $a=4$: il viendra 12, 16, 20, 24, etc., toujours de 4 en 4. Si $a=5$, on aura 13, 17, 21, 25, etc., de 4 en 4. Ces séries de nombres doivent procéder ainsi, puisque n augmentant d'une unité, $4n$ augmente de 4 pour une valeur fixe de a. Soit $a=6=7=8$, etc. : on retombera sur les séries précédentes. Il suffit donc de faire $a=2=3=4=5$ pour obtenir tous les nombres.

Soit la racine du carré total paire : elle est divisible par 2 ou par 4. Dans le premier cas le minimum des bandes de chaque branche sera 2, et dans le second cas ce minimum sera 4. Le maximum est égal à la racine, dont on doit ôter 8, qui est le plus petit nombre représentant la somme des racines de deux carrés partiels. Soit la racine 38 : le minimum des bandes est 2, et le maximum 30; on retombe

sur la série donnée par la supposition de $a=2$: car il vient 2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30. Si la racine est 44, le minimum est 4, et le maximum 36 : on aura donc 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36 bandes à chaque branche, et l'on retrouve la série pour laquelle $a=4$.

Si la racine est impaire, le maximum s'obtiendra toujours en ôtant 8 de cette racine; quant au minimum, puisque la somme des carrés partiels pris 2 à 2 est paire, il n'y a que 3 ou 5, qui sont les valeurs impaires de a, que l'on doive ôter de la racine. Si le reste de la soustraction de 3 donne un nombre divisible par 4, alors 3 sera le minimum; s'il faut ôter 5, ce sera ce dernier qui sera le minimum. Ainsi $39-8=31$ est maximum; et $39-3=36$ se divisant par 4, 3 est le minimum; et l'on a 3, 7, 11, 15, 19, etc., série provenante de la supposition $a=3$.

Si l'on avait 37 pour racine, le maximum serait $37-8=29$; et, comme $37-3$ ne se divise pas par 4, il faut prendre $37-5=32$, qui se divise par 4, et le minimum sera 5. Il viendra 5, 9, 13, 17, 21, etc., série provenante de la supposition $a=5$.

Trouvant immédiatement les nombres minimum et maximum, et les bandes augmentant de 4 en 4, si l'on fait $a=$ le premier terme, ou le minimum, $\omega=$ le dernier terme, ou le maximum, $d=4=$ différence de la progression, $n=$ le nombre des termes, on a $\omega=a+d(n-1)$: d'où $n=\frac{\omega-a}{d}+1=\frac{\omega+4-a}{4}$. Ainsi pour 37 de racine $\omega=29$; $a=5$: donc $n=\frac{28}{4}=7$. Il y aura donc 7 espèces de croix pour 37. Si la racine est 38, l'on a $\omega=30$; $a=2$: donc $n=\frac{32}{4}=8$ pour le nombre des croix différentes, dans le cas de

la racine 38. Il est clair qu'il n'est ici question que du genre de croix que l'on considère dans cette section.

On peut encore obtenir ce nombre de croix sans chercher les maximums ou minimums. Ainsi, que la racine ne se divise que par 2 : on aurait $\frac{r-8-2}{4}+1=\frac{r-10+4}{4}=\frac{r-6}{4}$, r étant la racine du carré total. Si la racine se divise par 4, on aura $\frac{r-8-4}{4}+1=\frac{r-8}{4}$.

Si la racine est impaire, et si, 3 soustrait de la racine, le reste se divise par 4, on aura $n=\frac{r-8-3}{4}+1=\frac{r-7}{4}$. Si le reste ne se divise pas par 3, on aura $n=\frac{r-8-5}{4}+1=\frac{r-9}{4}$; d'où il suit :

Si une racine paire ne se divise pas par 4, il faut ôter 6 de cette racine, et prendre le quart du reste; si elle se divise par 4, on ôte 8, et l'on divise par 4.

Si une racine impaire diminuée de 3 est divisible par 4, il faut ôter 7 de la racine, et prendre le quart; si le reste de la soustraction ne se divise pas par 4, il faut ôter 9, et prendre le quart. On obtient ainsi sur le champ le nombre de croix dont le carré est susceptible.

Il était nécessaire d'entrer dans le détail qui précède, afin de ne pas faire de fausses suppositions.

Que l'on ait 113 : le maximum des lignes de chaque branche serait 113—8=105; le minimum, puisque 113—3=110 n'est pas divisible par 4, sera donc = 5. Si l'on soustrait 9 de 113, il vient 104, dont le quart est 26, qui est le nombre de croix. De même, pour 127, on aurait 119 maximum, 3 minimum, et $\frac{127-7}{4}=\frac{120}{4}=30=$ le nombre des croix.

On peut demander si un nombre donné ferait partie des

croix d'une racine connue. On sait s'il faut ôter 2, 3, 4, 5 de cette racine pour que le reste se divise par 4, d'après ce qui a été dit plus haut. Si la racine est divisible par 4, il faut que le nombre donné soit lui-même un multiple de 4. Si la racine ne se divise que par 2, on ôtera 2 du nombre donné, et le reste doit se diviser par 4. Il en est de même pour 3 et 5. Ainsi, la racine étant 18, on veut savoir si 8 serait une des branches de croix; mais 8—2 =6 ne se divise pas par 4 : donc 8 n'est pas au nombre des branches. De même 115 est racine, on veut connaître si 91 est convenable pour une des branches : puisque 115 —3=112 se divise par 4, il faut ôter 3 de 91; reste 88, qui se divise par 4 : donc 91 est une des branches. Tout cela est la conséquence de ce qui précède.

ARTICLE V.

CARRÉ DE 18.

Comme 18 se divise par 2 seulement, le minimum des lignes de croix par branche est 2, le maximum est 10; qu'on choisisse 6, et qu'on forme les quatre carrés par les progressions à volonté.

3. 5... 13	282.284...292
18. 20... 28	297.299...307
33. 35... 43	312.314...322
32. 36... 52	227.231...247
55. 59... 75	250.254...270
78. 82... 98	273.277...293
100.101...105	206.207...211
107.108...112	213.214...218
114.115...119	220.221...225

121.123...131	168.170...178
134.136...144	181.183...191
147.149...157	194.196...204

On fera aisément les quatre carrés de 6 d'après les règles données, et de simples substitutions. Ces carrés ont été construits d'après les tableaux et le carré en résultant, que voici :

1.er TABLEAU.	2.e TABLEAU.	
1 2 3 4 5 6	0 30 30 0 30 0	1 32 33 4 35 6
6 2 3 4 5 1	6 6 24 24 6 24	12 8 27 28 11 25
6 5 4 3 2 1	18 18 12 12 12 18	24 23 16 15 14 19
1 5 4 3 2 6	12 12 18 18 18 12	13 17 22 21 20 18
6 2 4 3 5 1	24 24 6 6 24 6	30 26 10 9 29 7
1 5 3 4 2 6	30 0 0 30 0 30	31 5 3 34 2 36

Ainsi, au lieu de 1, 2, 3, 4, 5, 6, on mettra les premières séries pour chaque carré partiel; on substituera les secondes au lieu des nombres 7, 8, 9, 10, 11, 12, et ainsi de suite. On obtiendra, de cette façon, les carrés partiels (*figure* 137, *planche* XXIV.)

Pour faire le centre de la croix, on formera les trois premières verticales et les trois premières horizontales. Chacune de celles-ci aura une différence de chaque verticale avec son signe, et une autre avec changement de signe. Il est inutile de composer plus de la moitié des horizontales et des verticales, puisque la moitié de ces lignes comprend les complémens de l'autre moitié. Voici un tableau de ces lignes : on a remplacé les nombres par des lettres, afin de mieux faire voir la distribution de ces nombres et de leurs complémens; ceux-ci sont placés symétriquement. Il est bon de faire ce tableau toutes les fois que les branches de la croix sont composées d'un grand

nombre de bandes. La lettre *c*, après une lettre, signifie complément de cette lettre. On a renversé les lettres du dernier quart, pour ne pas les confondre avec celles qui sont communes. Ainsi le premier quart comprend les lettres communes aux horizontales et aux verticales ; le quart renversé comprend les complémens du premier. Le 2.e et le 3.e quart contiennent les lettres dans l'un d'eux, et leurs complémens dans l'autre. Cela répond aux nombres dont les différences, au signe près, sont les mêmes.

p	*p'*	*p''*	*u''c*	*u'c*	*u c*
q	*q'*	*q''*	*t''c*	*t'c*	*t c*
r	*r'*	*r''*	*s''c*	*s'c*	*s c*
s	*s'*	*s''*	*r''c*	*r'c*	*r c*
t	*t'*	*t''*	*q''c*	*q'c*	*q c*
u	*u'*	*u''*	*p''c*	*p'c*	*p c*

Il s'agit de former le tableau des différences depuis celle qui répond à 1, jusqu'à celle qui correspond à 162, qui est la moitié de 324, carré de 18, mais sans y comprendre celles qui se rapportent aux nombres des progressions choisies. Voici ces nombres :

3 5 7 9 11 13 18 20 22 24 26 28 32 33 35 36 37 39 40 41 43 44 48 52 55 59 63 67 71 75 78 82 86 90 94 98 100 101 102 103 104 105 107 108 109 110 111 112 114 115 116 117 118 119 121 123 125 127 129 131 134 136 138 140 142 144 147 149 151 153 155 157

On ne prendra donc les différences que des nombres ne faisant pas partie de ceux ci-dessus; le couple étant

325, la moitié 162,5 est la valeur moyenne de chaque nombre du carré. Il faut que chacun avec sa différence donne pour somme 162,5. Voici le tableau de ces différences.

1	+	161,5	—	324	56	+	106,5	—	269
2	+	160,5	—	323	57	+	105,5	—	268
4	+	158,5	—	321	58	+	104,5	—	267
6	+	156,5	—	319	60	+	102,5	—	265
8	+	154,5	—	317	61	+	101,5	—	264
10	+	152,5	—	315	62	+	100,5	—	263
12	+	150,5	—	313	64	+	98,5	—	261
14	+	148,5	—	311	65	+	97,5	—	260
15	+	147,5	—	310	66	+	96,5	—	259
16	+	146,5	—	309	68	+	94,5	—	257
17	+	145,5	—	308	69	+	93,5	—	256
19	+	143,5	—	306	70	+	92,5	—	255
21	+	141,5	—	304	72	+	90,5	—	253
23	+	139,5	—	302	73	+	89,5	—	252
25	+	137,5	—	300	74	+	88,5	—	251
27	+	135,5	—	298	76	+	86,5	—	249
29	+	133,5	—	296	77	+	85,5	—	248
30	+	132,5	—	295	79	+	83,5	—	246
31	+	131,5	—	294	80	+	82,5	—	245
34	+	128,5	—	291	81	+	81,5	—	244
38	+	124,5	—	287	83	+	79,5	—	242
42	+	120,5	—	283	84	+	78,5	—	241
45	+	117,5	—	280	85	+	77,5	—	240
46	+	116,5	—	279	87	+	75,5	—	238
47	+	115,5	—	278	88	+	74,5	—	237
49	+	113,5	—	276	89	+	73,5	—	236
50	+	112,5	—	275	91	+	71,5	—	234
51	+	111,5	—	274	92	+	70,5	—	233
53	+	109,5	—	272	93	+	69,5	—	232
54	+	108,5	—	271	95	+	67,5	—	230

96 + 66,5 — 229	139 + 23,5 — 186
97 + 65,5 — 228	141 + 21,5 — 184
99 + 63,5 — 226	143 + 19,5 — 182
106 + 56,5 — 219	145 + 17,5 — 180
113 + 49,5 — 212	146 + 16,5 — 179
120 + 42,5 — 205	148 + 14,5 — 177
122 + 40,5 — 203	150 + 12,5 — 175
124 + 38,5 — 201	152 + 10,5 — 173
126 + 36,5 — 199	154 + 8,5 — 171
128 + 34,5 — 197	156 + 6,5 — 169
130 + 32,5 — 195	158 + 4,5 — 167
132 + 30,5 — 193	159 + 3,5 — 166
133 + 29,5 — 192	160 + 2,5 — 165
135 + 27,5 — 190	161 + 1,5 — 164
137 + 25,5 — 188	162 + 0,5 — 163

On peut composer les trois premières verticales et les trois premières horizontales comme suit. On a eu soin de marquer les différences communes, afin de faciliter la construction du carré d'intersection. Soient donc les différentes lignes, savoir :

1.re VERTICALE.	2.e VERTICALE.	3.e VERTICALE.
+161,5—147,5	+132,5—115,5	+101,5—90,5
+160,5—146,5	+131,5—113,5	+100,5—89,5
+158,5—145,5	+128,5—112,5	+ 98,5—88,5
+156,5—143,5	+124,5—111,5	+ 97,5—86,5
+154,5—141,5	+120,5—108,5	+ 96,5—85,5
+152,5—139,5	+117,5—106,5	+ 94,5—83,5
+150,5—137,5	+116,5—105,5	+ 93,5—82,5
+148,5—135,5	+109,5—104,5	+ 92,5—81,5
+ 27,5—133,5	—102,5	—78,5
	— 0,5	— 8,5

1.re HORIZONTALE.			2.e HORIZONTALE.				3.e HORIZONTALE.			
+161,5	1.re v.	—65,5	+117,5	2.e v.	—133,5	1.re v.	+152,5	1.re v.	—154,5	1.re v. c.
+132,5	2.e v.	—66,5	+102,5	2.e v. c.	— 78,5	3.e v.	+109,5	2.e v.	— 85,5	3.e v.
+ 92,5	3.e v.	—67,5	+ 16,5		—150,5	1.re v. c.	+115,5	2.e v. c.	—101,5	3.e v. c.
+139,5	1.re v. c.	—69,5	+ 25,5		— 93,5	3.e v. c.	+ 2,5		— 17,5	
+112,5	2.e v. c.	—70,5	+ 30,5		— 29,5		+ 4,5		— 21,5	
+ 89,5	3.e v. c.	—71,5	+ 34,5		— 32,5		+ 6,5		— 23,5	
+ 63,5		—73,5	+ 38,5		— 36,5		+ 3,5		— 12,5	
		—74,5	+ 40,5				+ 14,5		— 10,5	
		—75,5	+ 42,5				+ 19,5		— 1,5	
		—77,5	+ 49,5							
		—79,5	+ 56,5							

Ici+161,5=*p*... +132,5=*p'*... +92,5=*p''*... +139,5=*uc*...+112,5=*u'c*.. +89,5=*u''c*. .
—133,5=*q*... +117,5=*q'*... —78,5=*q''*... —150,5=*tc*... +102,5—*t'c*... —93,5=*t''c*...
+152,5=*r*...+109,5=*r'*... —85,5=*r''*... —154,5=*sc*... +115,5=*s'c*... —101,5=*s''c*.

ARTICLE VI.

CARRÉ DE 22.

Soit encore le carré de 22 plus compliqué et avec croix à 10 bandes par branche. Qu'on choisisse, pour abréger, les 72 premiers et les 72 derniers nombres pour les carrés partiels de 6, savoir : les 18 premiers et les 18 derniers pour l'un d'eux, les suivans et les précédens pour un autre, et ainsi de suite. Qu'on fasse une bordure à chacun, et soient choisis pour chacune les 10 premiers et les 10 derniers de chaque série déterminée pour les carrés partiels. Il suffira de construire un des carrés avec bordure pour obtenir de suite les trois autres, en ajoutant ou retranchant un même nombre.

On a encore les 340 nombres du milieu, depuis 73 jusqu'à 412 inclus. Chaque couple vaut 485; la moitié 242,5 est la valeur de chaque nombre. Les différences seront de 0,5 à 169,5, cette dernière étant celle de 73. On peut, avec quelque attention, se passer de tableau de différences. Il faut même s'en dispenser toutes les fois qu'on ne s'est pas proposé de choisir ces différences sans suite et dans toutes les parties du tableau.

Soient les verticales, savoir :

1.re verticale.	2.e verticale.	3.e verticale.	4.e verticale.	5.e verticale.
+169,5—160,5	+148,5—139,5	+127,5—118,5	+106,5—97,5	+85,5—76,5
+168,5—159,5	147,5—138,5	126,5—117,5	105,5—96,5	84,5—75,5
167,5—158,5	146,5—137,5	125,5—116,5	104,5—95,5	83,5—74,5
166,5—157,5	145,5—136,5	124,5—115,5	103,5—94,5	82,5—73,5
165,5—156,5	144,5—135,5	123,5—114,5	102,5—93,5	81,5—72,5
164,5—155,5	143,5—134,5	122,5—113,5	101,5—92,5	80,5—70,5
163,5—154,5	142,5—133,5	121,5—112,5	100,5—91,5	79,5—69,5
162,5—153,5	141,5—132,5	120,5—111,5	99,5—90,5	78,5—68,5
161,5—152,5	140,5—131,5	119,5—110,5	98,5—89,5	77,5—67,5
149,5—151,5	128,5—130,5	107,5—109,5	86,5—88,5	28,5—66,5
71,5—150,5	50,5—129,5	29,5—108,5	8,5—87,5	18,5—65,5

1.re HORIZONTALE.

+169,5	1.re v.	—168,5	1.re v. c.	+64,5	—60,5
+148,5	2.e v.	—147,5	2.e v. c.	+63,5	—59,5
+127,5	3.e v.	—126,5	3.e v. c.	+62,5	—58,5
+106,5	4.e v.	—105,5	4.e v. c.	+61,5	—57,5
+ 85,5	5.e v.	—104,5	5.e c. c.	+54,5	—56,5
				+36,5	—55,5

2.e HORIZONTALE.

+167,5	1.re v.	—166,5	1.re v. c.	+53,5	—48,5
+146,5	2.e v.	—145,5	2.e v. c.	+52,5	—47,5
+125,5	3.e v.	—124,5	3.e v. c.	+51,5	—46,5
+104,5	4.e v.	—103,5	4.e v. c.	+49,5	—45,5
+ 83,5	5.e v.	— 82,5	5.e v. c.	+42,5	—44,5
				+21,5	—43,5

3.e HORIZONTALE.

+165,5	1.re v.	—164,5	1.re v. c.	+41,5	—37,5
+144,5	2.e v.	—143,5	2.e v. c.	+40,5	—35,5
+123,5	3.e v.	—122,5	3.e v. c.	+39,5	—34,5
+102,5	4.e v.	—101,5	4.e v. c.	+38,5	—33,5
+ 81,5	5.e v.	— 80,5	5.e v. c.	+30,5	—32,5
				+ 9,5	—31,5

4.e HORIZONTALE.

+163,5	1.re v.	—162,5	1.re v. c.	+27,5	—23,5
+142,5	2.e v.	—141,5	2.e v. c.	+26,5	—22,5
+121,5	3.e v.	—120,5	3.e v. c.	+25,5	—20,5
+100,5	4.e v.	— 99,5	4.e v. c.	+24,5	—19,5
+ 79,5	5.e v.	— 78,5	5.e v. c.	+ 6,5	—17,5
				+ 4,5	—16,5

5.e HORIZONTALE.

+161,5	1.re v.	—149,5	1.re v. c.	+13,5	—15,5
+140,5	2.e v.	—128,5	2.e v. c.	+12,5	—14,5
+119,5	3.e v.	—107,5	3.e v. c.	+ 2,5	—11,5
+ 98,5	4.e v.	— 86,5	4.e v. c.	+ 1,5	—10,5
+ 18,5	5.e v.	— 28,5	5.e v. c.	+ 0,5	— 7,5
					— 5,5
					— 3,5

Il est facile maintenant de faire le carré d'intersection, par lequel il faut toujours commencer, et sans recourir au tableau d'intersection. On procèdera comme suit. (*Figure* 138, *planche* XXIV.)

Les différences communes avec leur signe ne présentent pas de difficulté, et leurs complémens sont dans le dernier quart de l'intersection. Quant aux différences communes, mais avec changement de signe, qu'on veuille placer les nombres répondant aux différences + 101,5 et — 101,5, la première appartenant à la 4.e verticale, et la seconde à la 3.e horizontale : les nombres sont 141 et 344. Pour 141, qui doit être dans la 4.e verticale, on partira du bas de l'intersection ; et, remontant la 4.e verticale, on s'arrêtera à la case commune à la 3.e horizontale. Pour 344, qui doit être à la 3.e horizontale, on partira de la droite de l'intersection, le long de la 3.e horizontale, et l'on s'arrêtera à la case commune avec la 4.e verticale. On agira toujours de même, et il n'y aura pas d'embarras ou d'incertitude à éprouver.

Il est une autre manière de composition de croix ; c'est celle employée pour les croix dont les branches ont un nombre impair de bandes : on va développer ce procédé pour le carré de 14.

ARTICLE VII.

CARRÉ DE 14 AVEC CARRÉ MAGIQUE D'INTERSECTION.

Le carré d'intersection doit être composé de nombres en progression continue ou discontinue ; et, s'il est avec bordures, il faut que celles-ci soient telles que le carré avec bordures soit magique, ou, ce qui est la même chose, que les complémens soient aux cases opposées, sauf ceux des angles.

Que l'on suppose ici, pour les quatre carrés partiels, les progressions

1 · 2... 8	189 · 190... 196
9 · 10... 16	181 · 182... 188
17 · 18... 24	173 · 174... 180
25 · 26... 32	165 · 166... 172

Chaque carré est composé de deux progressions, dont l'une est complément de l'autre. (*Fig.* 139, *pl.* XXV.)

Que le carré d'intersection, qui est celui de 6, soit formé avec les deux progressions 33 · 34... 50...... 147 · 148... 164, et qu'on le suppose avec bordures. Sans faire le tableau des différences, on peut les grouper par 6, de manière que la somme de ces six différences soit = 0. Ces différences se placent sur la ligne qu'on veut, mais par groupes entiers; les complémens, aussi par groupes, et par ordre de nombres, complètent les horizontales et les verticales. Comme il y a ici 16 lignes entre les carrés partiels, et couvrant celui d'intersection, il faut avoir 8 groupes, dont 4 seront en horizontale, et 4 en verticale; il y en aura autant de complémentaires.

Soient ces groupes les suivans. Le plus petit nombre restant étant 51, sa différence 47,5 est la plus grande de toutes.

47,5+46,5+39,5—45,5—44,5—43,5	42,5+41,5+32,5—40,5—38,5—37,5
36,5+35,5+27,5—34,5—33,5—31,5	30,5+29,5+20,5—28,5—26,5—25,5
24,5+23,5+15,5—22,5—21,5—19,5	18,5+17,5+ 8,5—16,5—14,5—13,5
12,5+11,5+ 3,5—10,5— 9,5— 7,5	6,5+ 2,5+ 1,5+ 5,5— 4,5— 0,5

Si l'on place 4 de ces groupes dans les 8 horizontales, et leurs complémens dans les 4 autres, ceux-ci étant par ordre en verticale, on aura toutes les verticales couvrant le dessus et le dessous du carré d'intersection, régulières; de même les 4 autres groupes étant placés verticalement, leurs complémens trouvant place dans les autres verticales, et sur les mêmes horizontales, celles-ci seront exactes. On aura, dans le cas particulier, 7 carrés magiques, savoir : les quatre partiels, le carré central, et celui d'intersection, avec ou sans bordure.

Cette méthode est la plus facile, mais elle exige que le carré d'intersection soit magique. On voit que les carrés à compartimens donnent toujours une croix.

On peut être curieux de connaître les arrangemens dont sont susceptibles les groupes qui remplissent les intervalles entre les carrés partiels. Leur nombre est toujours connu ; il est égal au double de la racine d'un carré partiel. Quant au nombre de cases occupées par un groupe, il est égal à celui des bandes d'une branche de croix.

Soit donc construit un carré avec une croix : tout restant fixe, et les groupes étant composés invariablement, il s'agit de déterminer les arrangemens dont les groupes sont susceptibles, soit quant à leur placement dans les intervalles des carrés partiels, soit quant à leurs changemens particuliers, résultant de ceux que peuvent éprouver les nombres qui les composent, ces nombres étant d'ailleurs les mêmes pour chaque groupe.

Soit m le nombre des groupes, non compris ceux de leurs complémens ; soit n le nombre des cases de chaque groupe. Il est d'abord évident que ceux des verticales seront déterminés lorsqu'on aura choisi ceux des horizontales : or m groupes combinés $\frac{m}{2}$ à $\frac{m}{2}$ donneront

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots\left[m-\left(\frac{m}{2}-1\right)\right]}{1.2.3.4\ldots\frac{m}{2}}=\frac{m(m-1)(m-2)\ldots\left(\frac{m+2}{2}\right)}{1.2.3.4\ldots\frac{m}{2}}$$

Ce nombre donne les produits différens de m lettres combinées $\frac{m}{2}$ à $\frac{m}{2}$, et exprime les différens groupes qui seront dans les lignes horizontales, et par conséquent aussi ceux des lignes verticales, lesquels sont forcés d'après les premiers. Maintenant ces groupes et leurs complémens en horizontales se combineront entr'eux de $(1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m)$ manières, et ceux des verticales de même : on aura donc $(1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m)^2$. Si l'on passe aux nombres qui composent

chaque groupe, il y en a n. Ils se combineront de $(1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n)$ manières; et, comme chaque groupe subit les mêmes combinaisons, ce sera $(1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n)^m$. Il est clair que la puissance sera m seulement, et non $2m$; parce que les groupes complémentaires subissent les mêmes variations forcées que les m groupes. Faisant application ici, l'on aura $n = 6$, $m = 8$. Donc $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 70$. Ainsi 70 $(1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 8)^2 (1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 6)^8$ sera le nombre de combinaisons des groupes seulement, ou 70 $(518{,}400)^4 \cdot$ 1,625,702,400, nombre prodigieux, si l'on considère que toute composition est fixe. Il faudrait encore multiplier ce produit par 24, représentant le nombre de variations des 4 carrés partiels entr'eux, et encore par 8^4 pour les variations de chaque carré. Quant au carré central, il aurait 8 variations; mais il faudrait diviser le produit total par 8, pour avoir les combinaisons réellement différentes : de sorte que ce dernier facteur doit être non avenu, à moins que le carré total ne fasse partie d'un autre carré.

ARTICLE VIII.

CARRÉ DE 14 A BORDURE DOUBLE, ET CROIX A DEUX BANDES.

Si l'on compare (*figures* 139 *et* 145, *planche* XXV) les carrés de ces figures, on verra qu'il y a toujours 7 carrés, savoir : le total, les 4 partiels, un autre formé par les 4 angles, les 8 nombres du milieu de la 1.re bordure, et les 4 du milieu de la croix; enfin un dernier composé des 4 nombres autour de chaque angle, des deux du milieu de chaque bordure, et des 4 du centre de la

croix. On pourrait y ajouter celui résultant de la réunion des 4 carrés partiels.

Il est essentiel de remarquer que, dans la figure 145, les bordures sont fautives isolément, et même que la double bordure est fautive : car les complémens ajoutés aux nombres ne donnent pas deux couples ; la croix est également fausse, puisque les bandes ne donnent pas un couple pour les deux nombres en regard ; mais le tout est magique, et l'on a 4 carrés partiels divisés par une fausse croix. Cette construction est très-remarquable.

On pourrait faire disparaître la croix, comme on voit (*planche* XXIII *bis*, *figure* K) : on a une bordure triple.

On ne pourrait faire une croix avec carré d'intersection magique, d'une bordure régulière : la croix n'en serait pas moins régulière ; mais, à l'exception des diagonales, qui auraient la somme voulue, les autres lignes de ce carré d'intersection seraient irrégulières.

CHAPITRE II.

LES CROIX ONT LEURS BRANCHES COMPOSÉES D'UN NOMBRE IMPAIR DE BANDES.

Il faut, pour ce genre de carré, que le central soit magique, qu'il y ait ou non bordure. Il peut aussi avoir ses complémens dans les cases symétriques. Ainsi, après avoir choisi les nombres pour les carrés partiels, il faut en choisir de même pour le carré d'intersection, de manière à ce que la condition suivante soit remplie :

Si la croix est composée de 3 lignes, il est nécessaire que le tiers des différences restantes soit égal aux deux

autres tiers ou plus grand. Si l'on ne peut obtenir cette condition, la croix ne peut avoir lieu. Si le nombre des bandes est 5, les $\frac{2}{5}$ doivent égaler ou surpasser les $\frac{3}{5}$ des différences. Si les branches ont 7 lignes, les $\frac{3}{7}$ égaleront ou surpasseront les $\frac{4}{7}$ des différences, et ainsi de suite. Voici des exemples :

ARTICLE PREMIER.

CARRÉ DE 11.

Soient pris les 32 premiers et les 32 derniers nombres pour les carrés partiels. Les différences restantes sont 1, 2, 3...28, non compris 0, qui correspond au moyen, et qui fait toujours partie du carré d'intersection. Soit prise pour celui-ci la série de différences 1, 2, 3, 4, ce qui donne les nombres 57, 58...65. Les 8 plus grandes restantes sont 21, 22...28, dont la somme $=196$. Les 16 plus petites sont 5, 6... $20 = 200 > 196$. Ainsi les différences choisies ne peuvent convenir, puisqu'on ne peut faire refluer quelques-uns des grands nombres au lieu des petits, et réciproquement; mais si les 8 plus grands surpassent les 16 plus petits, il pourra y avoir réfusion.

On peut généralement opérer cette substitution de manière que les sommes soient égales. Qu'on prenne les différences 0, 7, 14, 21, 28 : les différences restantes donnent 186 pour les 8 plus grands nombres, et 150 pour les 16 plus petits; la différence est 36, dont la moitié $= 18$. Si l'on substitue, par exemple, 4 au lieu de 22 parmi les grands, la somme des différences sera la même, et l'on pourra former les groupes $4 - 1 - 3 = 0 \ldots.$ $24 - 22 - 2$

=0.... 23—18—5=0.... 27—10—17=0.....
26—15—11=0.... 25—16—9=0....20—12—8=0
...., 19—13—6=0.

Avec ces données, et en plaçant chaque groupe sur une même ligne horizontale ou verticale, on aura, par la substitution des nombres aux différences, le carré (*figure* 140, *planche* XXIV). Les complémens se mettent par ordre sur une autre ligne horizontale ou verticale, et il n'est pas nécessaire que ces complémens soient de l'autre côté du carré central : ils peuvent se placer à volonté, pourvu qu'ils soient sur la même ligne que les nombres dont ils sont les complémens, soit verticale, soit horizontale.

On peut prendre d'autres progressions, pourvu que la condition ci-dessus soit remplie, et que l'on puisse obtenir autant de sommes de différences = 0, qu'il y a d'unités dans la double racine de l'un des carrés partiels, et après avoir fait refluer, s'il est nécessaire, quelques grands nombres parmi les petits, et réciproquement. Par exemple, si l'on eût substitué 27 à 9, comme 28 fait partie du carré d'intersection, il deviendrait impossible qu'un autre grand nombre plus petit que 27, pût se composer avec ce dernier et un petit, et donner une somme = 0.

La figure montre que les complémens sont placés sur une même ligne, et par groupes; mais ces groupes sont à volonté, soit du même côté que les simples, soit de l'autre côté du carré d'intersection : ainsi, pour le groupe de la 1.re horizontale, entre les carrés partiels, celui de ses complémens est à la 2.e horizontale. Il en est de même

des deux dernières horizontales. La 3.e a ses complémens à la 2.e au dessous du carré central, et la 4.e à la 1.re au dessous du même carré. Le groupe de la 1.re verticale répond à celui de la seconde, le 3.e à la dernière, le 4.e à la seconde, après le carré; enfin les 1.er et 3.e de droite sont complémens l'un de l'autre.

Il est d'autres signes auxquels on peut reconnaître que les progressions ne peuvent convenir. Ainsi, soient, pour les carrés partiels, les progressions

2 . 5 . 8 . 11 17 . 20 . 23 . 26	et complémens.
1 . 7 . 13 . 19 21 . 27 . 33 . 39	et complémens.
40 . 42 . 44 . 46 49 . 51 . 53 . 55	et complémens.
41 . 43 . 45 . 47 52 . 54 . 56 . 58	et complémens.

Les nombres restans sont 60, 59, 57, 50, 48, 38, 37, 36, 35, 34, 32, 31, 30, 29, 28, 25, 24, 22, 18, 16, 15, 14, 12, 10, 9, 6, 4, 3.

Règle. Si, après avoir choisi des différences pour le carré central, la somme de toutes les différences restantes est impaire, la croix n'est pas possible. En effet ces différences seront partagées en deux parties, dont l'une aurait pour somme un nombre pair, et l'autre un nombre impair; or, par la comparaison des différences de l'une des parties avec celles de l'autre, il se présentera une absurdité: car une différence impaire parmi les grandes ne peut se comparer qu'à deux autres, dont l'une est paire et l'autre impaire.

Après ce groupe formé il restera donc encore deux sommes de différences, dont l'une est paire, et l'autre impaire. Lorsque l'on compare une différence paire avec deux autres, celles-ci seront toutes deux paires, ou toutes deux impaires. Les sommes restantes auront donc encore pair et impair pour résultat : on arrivera donc à comparer une différence paire avec une paire et une impaire, ou bien une, différence impaire avec deux paires ou deux impaires, ce qui est impossible.

Les différences des nombres ci-dessus sont

58 57 55 52 51 49 47 46 45 43 39 37 36 33 32 31
30 29 27 26 25 24 23 13 11 4 2 1.

Comme il y a 18 impairs, la somme totale est paire. Voyons les conséquences. Soit d'abord, pour le carré central, la différence des progressions = 1 : on ne pourra trouver, dans la série des différences ci-dessus, que 33 • 32 • 31... 1 • 0....... 32 • 31 • 30... 1 • 0...... 31 • 30 • 29... 1 • 0, etc. Si l'on choisit les différences 33, 32, 31, 1, comme il y a 3 impairs, il n'en restera plus que 15 parmi les restantes, ce qui ne se peut. Il en est de même de 31, 30, 29, 1. Mais si l'on prend 32, 31, 30, 1, comme il n'y a que 2 impairs, la somme des différences restantes est paire; mais alors les 8 plus grandes donnent 415 pour somme, et celle des plus petites est 417 : ainsi point de croix. Il est inutile de passer à 3 nombres de suite inférieurs à 32, 31, 30, puisque la somme des petites différences augmenterait, celle des grandes restant fixe.

Soit supposée la différence de progression pour le carré central = 2 : alors les nombres de la première progres-

sion seront tous trois pairs ou tous trois impairs. S'ils sont impairs, puisque 2 • 0 • — 2 est la progression du milieu, on soustrairait donc trois impairs de la somme totale des différences : le restant serait donc impair, ce qui ne peut donner de croix. On ne trouve point de progression dont les termes soient pairs.

Puisque 4 • 0 donne 4 pour différence, on ne peut supposer la différence des progressions pour le carré central = 3. Qu'elle soit donc = 4 : alors les trois termes de la première progression seront tous pairs ou tous impairs. On ne trouve point de pairs en progression ; et si l'on prend 3 impairs, puisque 4 est pair, on soustrait 3 impairs d'une somme paire : donc le reste est impair.

On ne peut supposer la différence de la 1.re progression du carré central = 5 = 6 = 7 = 8 = 9 = 10. Qu'elle soit 11 : alors la progression comprendra 2 pairs et un impair, ou un pair et 2 impairs. Dans ce dernier cas on aurait à soustraire 3 impairs, y compris 11, ce qui ne peut être si l'on veut une croix. Soit donc la progression composée de 2 pairs et un impair : on n'aura que 58 • 47 • 36 et 24 • 13 • 2.

Soit 58 • 47 • 36 : on aura pour les 8 plus grands, qui sont 57, 55, 52, 51, 49, 46, 45, 43, la somme = 398 ; et pour les 16 petits, qui sont 39, 37, 33, 32, 31, 30, 29, 27, 26, 25, 24, 23, 13, 4, 2, 1, la somme = 376. La différence est 22, dont la moitié est 11. Il faut donc faire passer dans les 8 premiers des nombres pris parmi les petits, tels que la différence entre la somme de ces petits et celle des grands que l'on range parmi les petits, soit = 11. Mais on n'en peut faire passer deux : car les

deux plus grands des petits 39 + 37=76 sont inférieurs de 12 à la somme des deux plus petits parmi les grands 45+43=88. On n'en peut donc faire passer qu'un seul, et il n'y a que 32 qui remplacera 43. Mais on voit sur le champ que 45 ne peut se comparer qu'à 43+2, et par conséquent 32 qu'à 31+1 : d'où il suit que 4 ne peut plus entrer dans aucun groupe, et en conséquence on ne peut les former tous. Si l'on prend 24 · 13 · 2, la somme des 8 plus grands sera plus petite que celle des 16 plus petits : ainsi point de croix.

Soit la différence de la 1.re progression =13 : on aura 52 · 39 · 26.... 13 · 0, et 58 · 45 · 32.... 13 · 0. On ne peut plus faire de suppositions, puisque 23 pour différence donnerait pour premier terme un nombre > 58.

Soit donc la 1.re progression 52 · 39 · 26, et la seconde 13 · 0 · — 13, etc.

Les 8 premiers nombres deviendront 58, 57, 55, 51, 49, 47, 46, 45, dont la somme = 408 ; les 16 petits, 43, 37, 36, 33, 32, 31, 30, 29, 27, 25, 24, 23, 11, 4, 2, 1, auront pour somme 388. La différence des deux sommes donne 20, dont la moitié = 10 ; mais il n'y a que 37 au lieu de 47, et 36 au lieu de 46, qu'on puisse substituer, puisque la différence = 10. Si l'on substitue 47 au lieu de 37, et réciproquement, on ne peut faire 46. Soient donc les progressions 58 · 45 · 32, et 13 · 0. Les grands nombres seront 57, 55, 52, 51, 49, 47, 46, 43, =400. Les petits, 39, 37, 36, 33, 31, 30, 29, 27, 26, 25, 24, 23, 11, 4, 2, 1, ont pour somme 378 : la différence est 22, dont la moitié est 11. Il n'y a que 36 au lieu de

47 à substituer : cela supposé, on aurait 47 + 4 = 51, 47+2=49. Mais 46 ne peut se composer.

Il faut conclure de l'analyse ci-dessus, que les progressions choisies pour les carrés partiels ne conviennent pas. Il faut donc en choisir d'autres. L'on voit aussi que, malgré les conditions remplies d'ailleurs, il est possible qu'on ne puisse faire une croix. La méthode donnée est donc la plus sûre, et il faut choisir pour les carrés partiels les premiers et derniers nombres.

Si, toujours en prenant ces premiers et derniers nombres, on eût choisi 0, 5, 10, 15, 20 pour les différences du carré central, les huit plus grandes restantes, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, ont pour somme 196; et les 16 plus petites, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, donnent 160 < 196. La différence = 36, dont la moitié est 18. Or il y a plusieurs manières de substituer un, et même deux nombres des petits dans les grands, et réciproquement, de manière que 18 soit la différence des nombres substitués. Que l'on mette 6 au lieu de 24, par exemple : on pourra faire les groupes suivans; et pour les former, voici toutes les compositions possibles pour les grands nombres avec les petits.

6 = 2 + 4 : il n'y a pas d'autre composition pour 6. Il faut donc n'avoir aucun égard aux groupes où entrerait 2 ou 4. Maintenant, 21 peut se former par 18 + 3.... 14+7.... 13+8.... 12+9.

22 se compose par 19 + 3.... 14 + 8.... 13 + 9.

23 aura 16 + 7.... 14 + 9.... 12+ 11.

25 se composera par 24 + 1.... 18 + 7.... 17 + 8.... 16+9.... 14+11.... 13+12.

26 équivaut à 19 + 7. . . . 18 + 8. . . . 17 + 9. . . . 14 + 12.

27 = 24 + 3. . . . 19 + 8. . . . 18 + 9. . . . 16 + 11. . . . 14 + 13.

Enfin 28 = 19 + 9. . . . 17 + 11. . . . 16 + 12.

En jetant les yeux sur ces combinaisons, on voit que 1 ne figure que dans la valeur de 25 : d'où il suit que toutes les combinaisons où entre 24, doivent être nulles, excepté pour 25. On peut avoir les couples 28 — 17 — 11. . . . 27 — 13 — 14. . . . 26 — 18 — 8. . . . 23 — 16 — 7. . . . 22 — 19 — 3. . . . 21 — 12 — 9; ou bien 28 — 17 — 11. . . . 27 — 8 — 19. . . . 26 — 12 — 14. . . . 23 — 16 — 7. . . . 22 — 13 — 9. . . . 21 — 18 — 3. On peut encore former, avec les valeurs de 21, 22, 23, 26, 27, 28, d'autres combinaisons.

Il arrive souvent qu'on est obligé de modifier quelques-unes des compositions adoptées d'abord, parce qu'on ne peut parvenir à composer les autres groupes avec les petits nombres restans : d'où il suit que la méthode, quoique directe pour faire éviter de faux essais, n'est que de tâtonnement pour composer les groupes, lorsqu'on sait déjà qu'ils sont possibles; et la difficulté est d'autant plus grande, que les branches ont moins de bandes. On ne connaît pas de marche directe pour former ces groupes immédiatement, quoiqu'on ait sous les yeux les différentes valeurs de chaque grand nombre en petits nombres, comme dans l'exemple ci-dessus.

Au reste, pour tous les cas où l'on n'a que trois lignes par branche, on se servira de la marche indiquée au commencement de l'article. On fera les carrés partiels avec les premiers et les derniers nombres; quant au carré central,

on prendra la progression dont 0 est le premier terme, et dont le dernier est la plus grande différence restante. Il n'y aura plus qu'à intercaler trois moyens arithmétiques, ou, ce qui revient au même, prendre le quart du dernier terme pour le second de la progression, et doubler, tripler, pour les suivans. Ainsi, dans le carré de 11, la plus grande différence restante étant 28, la progression sera 0, 7, 14, 21, 28, et l'on procèdera à la composition des groupes assez facilement.

ARTICLE II.

CARRÉ DE 15.

D'après ce qui précède, soient choisis les 72 premiers et les 72 derniers nombres pour les carrés partiels, qui seront de 36 cases. D'abord on peut, avec ces 72 nombres, composer d'une foule de manières ces carrés partiels, en choisissant des progressions continues ou discontinues pour chaque carré, qu'on peut aussi faire avec bordures. Quant au carré central, soient choisies les différences 0, 10, 20, 30, 40, dont la dernière est la plus grande des restantes. Il y en aura encore 36 : les 12 plus grandes, 39, 38, 37, 36, 35, 34, 33, 32, 31, 29, 28, 27, ont pour somme 399; les 24 plus petites 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 24, 25, 26, valent 321. La différence des sommes est 78, dont la moitié = 39. Il est clair qu'on ne pourrait ici remplacer un seul nombre : car la différence entre 1, qui est le plus petit des petits, et 39, qui est le plus grand des grands, n'est que 38 < 39 qu'on doit avoir. Mais si, par exemple, on met dans les grands nombres 7 et 9 des petits, et dans les petits 27 et 28 des

grands, on pourra avoir les groupes 7=5+2....9=6 +3....29=28+1....31=27+4....32=24+8.... 33=16+17..... 34=23+11..... 35=22+13..... 36=21+15..... 37=18+19..... 38=26+12..... 39=25+14. On verra ce carré (*figure* 141, *planche* XXV), après substitution des nombres aux différences.

ARTICLE III.

CARRÉS CENTRAUX.

On a dit que le carré central pouvait être symétrique; mais il ne peut y avoir de bordures symétriques : car le carré fait avec cette bordure ne pourrait être magique. Le carré central peut bien être construit avec les différences, mais non avec tableaux.

Soit le carré de 5 à construire par les différences. On peut faire :

1.re horizontale. —12+7+ 6+3—4
2.e horizontale. +11—8—10+5+2

1.re verticale... —12+4+11—2—1
2.e verticale... +7—3— 8—5+9

Alors l'horizontale du milieu sera—1+9.0—9+1, et la verticale du milieu +6—10.0+10—6, et il viendra :

—12+7+ 6+3— 4	}	par les différences.
+11—8—10+5+ 2		
— 1+9+ 0—9+ 1		
— 2—5+10+8—11		
+ 4—3— 6—7+12		

25	6	7	10	17	
2	21	23	8	11	
14	4	13	22	12	par les nombres.
15	18	3	5	24	
9	16	19	20	1	

Si l'on tirait les tableaux, on aurait :

1.er TABLEAU.

5	1	2	5	2
2	1	3	3	1
4	4	3	2	2
5	3	3	5	4
4	1	4	5	1

2.e TABLEAU.

20	5	5	5	15
0	20	20	5	10
10	0	10	20	10
10	15	0	0	20
5	15	15	15	0

Il est bien impossible de prévoir cette forme de tableaux; et cependant le carré de 5 est magique. Cela démontre de plus en plus combien la méthode d'opérer par tableaux, quelque quantité de combinaisons qu'elle produise, est circonscrite. On verra de nouvelles formes auxquelles ils sont encore moins applicables. Avec les mêmes horizontales on peut construire autrement les verticales : ainsi

—12— 4+ 6+ 3+ 7	25	17	7	10	6
+ 2+11—10+ 5— 8	11	2	23	8	21
+ 9+ 1+ 0— 1— 9	4	12	13	14	22
+ 8— 5+10—11— 2	5	18	3	24	15
— 7— 3— 6+ 4+12	20	16	19	9	1

1.er TABLEAU.

5	2	2	5	1
1	2	3	3	1
4	2	3	4	2
5	3	3	4	5
5	1	4	4	1

2.e TABLEAU.

20	15	5	5	5
10	0	20	5	20
0	10	10	10	20
0	15	0	20	10
15	15	15	5	0

On voit des tableaux très-différens des précédens; mais de quelque manière que soit construit le carré central, pourvu qu'il soit magique, on peut opérer par groupes.

Soit le carré central celui de 7; qu'on choisisse les nombres du milieu pour le carré de 5 : on obtiendra, en ajoutant 12 à chaque nombre du premier des deux carrés de 5, celui que voici :

37	18	19	22	29
14	33	35	20	23
26	16	25	34	24
27	30	15	17	36
21	28	31	32	13

Les différences des nombres restans sont de 13 à 24, et l'on peut former la bordure par

24—18+23+22—19—17—15 1.re horizontale.
24+18+21—20—16—14—13 1.re verticale.

Pourvu que les complémens soient aux cases opposées, à l'exception des angles, on aura le carré de 7 magique.

ARTICLE IV.

CARRÉ DE 13.

Soit ce carré avec croix à 5 lignes par branche, chaque groupe ayant 5 nombres ou 5 différences. Il faudra que 2 d'entr'elles soient égales à 3 autres. Soient choisis les 32 premiers et 32 derniers nombres pour les carrés partiels : le carré central sera de 25 cases. Si l'on choisit la progression 37·41·45·49·53·57·61·65·69·73·77·81 (85) et complémens, on construira le carré de 5 par les moyens connus, sans qu'on soit tenu de mettre 85 au

centre, à moins que le carré ne soit construit symétriquement, ou avec bordures. Il faut actuellement que l'on ait 16 différences égales à 24. Les plus grandes sont 52, 51, 50, 49, 47, 46, 45, 43, 42, 41, 39, 38, 37, 35, 34, 33 = 682; les plus petites sont 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 29, 30, 31, = 384; la différence = 298, dont la moitié = 149. Qu'on prenne, par exemple, les différences 33, 34, 51, 52 = 170 parmi les grands : on a 170 — 149 = 21. Donc, si 4 petites différences valent 21, et qu'on les substitue parmi les grandes, on aura établi l'égalité cherchée. Soient ces 4 petites différences 1, 2, 7, 11 : il viendra 1, 2, 7, 11, 35, 37, 38, 39, 41, 42, 43, 45, 46, 47, 49, 50, grandes différences; 3, 5, 6, 9, 10, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 29, 30, 31, 33, 34, 51, 52, petites différences; et l'on pourra faire les groupes ou équations.

$11+7-3-6-9=0 \ldots 50+1-14-18-19=0 \ldots$
$49+2-5-21-25=0 \ldots 46+47-26-33-34=0 \ldots$
$45+43-15-22-51=0 \ldots 42+41-23-29-31=0 \ldots$
$37+38-10-13-52=0 \ldots 39+35-17-27-30=0.$

On a une grande latitude pour faire les groupes, et elle est d'autant plus grande que la croix a ses branches composées d'un plus grand nombre de bandes. Ainsi au hasard on pourrait procéder à la composition des groupes comme suit :

$49+1=33+14+3 \ldots 43+2=21+19+5 \ldots$
$39+7=22+18+6 \ldots 46+11=25+23+9 \ldots$
$45+50=52+30+13 \ldots 47+41=51+27+10 \ldots$
$42+38=34+31+15 \ldots 37+35=29+26+17.$

Il n'y a que pour les branches à trois bandes, que l'on éprouve quelque difficulté. On serait encore plus libre si l'on avait 3 contre 4 différences.

Comme on peut réduire toutes les croix à branches composées de lignes en nombre impair, à n'en avoir que 3 ou 5, il pourrait suffire d'avoir donné des exemples de ces carrés; mais voici encore le carré de 25, et l'on choisira 9 bandes à chaque branche; lés carrés partiels seront de 8 cases à la racine, et le carré central celui de 9. On trouvera le carré de 13 (*figure* 142, *planche* XXV).

ARTICLE V.

CARRÉ DE 25.

Qu'on choisisse les 128 premiers et les 128 derniers nombres pour les carrés partiels, et qu'on les forme par les séries

1	2...	32......	594	595...	625
33	34...	64......	562	563...	593
65	66...	96......	530	531...	561
97	98...	128......	498	499...	529

On peut choisir pour le carré central les différences 0 4 8 12... 160, ou les nombres y correspondant, 153 157 161... 313, et leurs complémens. Chaque couple vaut $626 = 625 + 1$; il y a 16 groupes de 9 termes chacun, en tout 144 termes.

Le 9.e de 144 étant 16, il y aura 64 grandes différences contre 80 petites.

Les 64 grandes restantes sont

$\overline{184}$ $\overline{183}$ $\overline{182}$ $\overline{181}$ $\overline{180}$ 179 178 177 176 175 174 173
172 171 170 169 $\overline{168}$ $\overline{167}$ $\overline{166}$ $\overline{165}$ $\overline{164}$ $\overline{163}$ 162 161
159 158 157 155 154 153 151 $\overline{150}$ $\overline{149}$ $\overline{147}$ $\overline{146}$ $\overline{145}$
$\overline{143}$ $\overline{142}$ 141 139 138 137 135 134 133 131 130 129
127 126 125 123 122 121 119 118 117 115 114 113
111 110 109 107.

La somme est 9473. Les petites sont

106 105 103 102 101 99 98 97 95 94 93 91 90 89 87
86 85 83 82 81 79 78 77 75 74 73 71 70 69 67 66
65 63 62 61 59 58 57 55 54 53 51 50 49 47 46 45
43 42 41 39 38 37 35 34 33 31 $\overline{30}$ $\overline{29}$ $\overline{27}$ $\overline{26}$ $\overline{25}$ $\overline{23}$
$\overline{22}$ $\overline{21}$ $\overline{19}$ $\overline{18}$ $\overline{17}$ $\overline{15}$ $\overline{14}$ $\overline{13}$ 11 $\overline{10}$ $\overline{9}$ 7 6 5 $\overline{3}$ 2 $\overline{1}$.

Leur somme est 4267.

Or 9473—4267=5206 : la moitié est 2603. Il faut donc faire passer parmi les grands assez de petits nombres, et parmi les petits de grands nombres, pour que la différence des uns aux autres soit égale à 2603. Que l'on choisisse, par exemple, parmi les grands, 184, 183, 182, 181, 180, 168, 167, 166, 165, 164, 163, 150, 149, 147, 146, 145, 143, 142, dont la somme est 2925. La différence de 2925 à 2603 est 322. Il faut donc prendre 18 petites différences dont la somme soit = 322, par exemple les suivantes: 1, 3, 9, 10, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 29, 30. On a surmonté d'un trait les différences qui passent des grandes aux petites, et réciproquement. Cette substitution opérée, on peut faire les groupes comme suit :

179+178+177+ 3—183—184—106—53—11=0

174+175+176+ 9—181—182— 82—83— 6—0

171+172+173+ 10—180—168— 85—86— 7=0

162+169+170+ 1—166—167— 90—77— 2=0

158+159+161+ 13—164—165— 89—38—35=0

154+155+157+ 14—163—150—101—61— 5=0

141+151+153+ 15—147—149— 66—67—31=0

137+138+139+ 17—145—146— 50+57—33=0

133+134+135+ 18—142—143— 62—34—39=0

129+130+131+ 19—103—105— 79—81—41=0

126+127+ 21+ 22— 87— 78— 49—45—37=0

123+125+ 23+ 25— 98— 54— 51—46—47=0

121+122+ 26+ 27— 73— 75— 63—43—42=0

113+117+118+119—102— 99— 97—95—74—0

109+110+111+ 29— 93— 94— 55—58—59=0

107+114+115+ 30— 91— 71— 70—69—65=0

Ces groupes se forment facilement, parce qu'on a 4 différences contre 5, et qu'il y a grande latitude à l'arbitraire. Il est facile d'achever le carré en substituant, pour les groupes, les nombres aux différences. Il faut s'abstenir, autant que possible, de former le tableau des différences et des nombres. On évite aisément cette opération longue et fastidieuse avec un peu d'attention. On verra le carré de 25 (*figure* 143, *planche* XXVI).

Il n'est pas indispensable que l'on compare 4 à 5 différences. Il est possible que 3 puissent s'égaler à 6. Il faut voir si 48 plus grandes donnent une somme qui excède celle des 96 plus petites, ou lui est égale. Or on a vu que les 64 plus grandes différences donnent 9473; les 16

plus petites de ces 64 ont pour somme 1877, lesquels retranchés de 9473, reste 7596. Les 80 plus petites différences avaient pour somme 4267. Si on leur ajoute les 16 plus petites parmi les grandes, ou 1877, on aura pour les 96 plus petites 6144 : l'excédant des grandes sur les petites sera donc de 1452 = 7596 — 6144. La moitié de 1452 = 726, dont il faut diminuer les grandes et augmenter les petites. Faisant passer, par exemple, parmi les petites, les différences 180, 181, 182, 183, 184, dont la somme est 910, elles seraient augmentées de 910 — 726 = 184 de trop. Mais si l'on transporte parmi les grandes les petites 29, 37, 38, 39, 41 = 184, les sommes des 48 grandes et des 96 petites différences seront égales, et il faudra que trois grandes soient égales à six petites.

Les grandes seront

29 37 38 39 41 129 130 131 133 134 135 137 138 139 141 142 143 145 146 147 149 150 151 153 154 155 157 158 159 161 162 163 164 165 166 167 168 169 170 171 172 173 174 175 176 177 178 179

Les petites seront

1 2 3 5 6 7 9 10 11 13 14 15 17 18 19 21 22 23 25 26 27 30 31 33 34 35 42 43 45 46 47 49 50 51 53 54 55 57 58 59 61 62 63 65 66 67 69 70 71 73 74 75 77 78 79 81 82 83 85 86 87 89 90 91 93 94 95 97 98 99 101 102 103 105 106 107 109 110 111 113 114 115 117 118 119 121 122 123 125 126 127 180 181 182 183 184.

On peut encore plus facilement construire les 16 groupes que dans le cas de quatre différences contre cinq. Il est clair qu'on ne pourrait supposer que deux différences

fussent égales à 7 : car les petites excèderaient de beaucoup les 32 plus grandes. Si l'on faisait les carrés partiels de 36 cases, les groupes auraient 13 termes, et l'on aurait 12 groupes; on examinerait si 5 différences peuvent en égaler 8, ou 3 être comparées à 10 : cette première égalité peut subsister. Si les carrés partiels étaient de 16 cases, on aurait 8 groupes de 17 termes chacun, et l'on aurait 8 différences à égaler à 9; on pourrait avoir aussi 7 contre 10, 6 contre 11, etc. On peut sur le champ trouver les sommes des différences, et s'assurer de la possibilité ou impossibilité de la comparaison.

Voici les groupes pour le carré de 25, d'après l'égalité de 3 différences contre 6 :

179+177+178—180—181—106—23—25—19
176+175+174—182—183—105—26—18—11
173+172+171—184—103—102—46—47—34
170+169+168—101— 99— 98—97—95—17
41+ 39+ 38— 35— 33— 31—10— 7— 2
37+ 29+167— 94— 93— 30— 9— 6— 1
166+165+164— 91— 90— 89—87—85—53
163+162+161— 86— 83— 82—81—79—75
159+158+157—127—126—125—78—13— 5
155+153+151—123—122—121—45—27—21
154+150+149—118—119—117—43—42—14
145+146+147—113—114—115—59—22—15
143+142+141—110—111— 71—66—65— 3
139+138+137—109— 77— 69—58—51—50
135+134+133—107— 74— 61—49—57—54
131+130+129— 73— 67— 55—70—63—62

On a encore plus de latitude dans le cas actuel que dans celui où 4 différences étaient opposées à 3. On a pris les différences arbitrairement. Il faut toujours conclure que le cas le plus difficile est celui d'une différence contre deux.

ARTICLE VI.

CARRÉ DE 11 AVEC CROIX D'UNE BANDE ET UNE BORDURE.

CARRÉ DE 13 AVEC CROIX D'UNE BANDE ET DEUX BORDURES.

Si l'on rapproche les figures (140, *planche* XXIV) et (*figure* 144, *pl.* XXV), on verra que l'on peut ne laisser qu'une bande en croix, et faire une bordure, non que cette bordure soit régulière, ce qui est impossible, puisque la croix n'a qu'une bande; mais les carrés partiels ne sont pas moins séparés par cette bande, de manière à avoir le carré total magique. Ces carrés partiels ne varient pas; les nombres qui couvrent les carrés sont les mêmes que dans la croix à 3 bandes : ainsi, sans toucher au carré central, on retire au dessus et au dessous les horizontales supérieure et inférieure de la croix, et à droite et à gauche les 1.re et 3.e verticales. Quant au carré central, les nombres en diagonale le sont encore, et dans les mêmes lignes : ainsi, par exemple, 82, qui était à l'intersection de la 1.re horizontale et de la 1.re verticale, et qui faisait partie de la 1.re diagonale, sera placé à l'angle de ces lignes; et de même pour les autres angles; le terme moyen reste fixe; enfin les autres nombres, comme 33, 75, etc., se retirent dans les lignes dont ils faisaient partie. Il y aura toujours un autre carré

magique résultant de la réunion des quatre carrés partiels; mais le carré renfermé dans la fausse bordure n'est pas magique. On aurait un autre carré magique composé des 4 angles, des 4 nombres du milieu de chaque ligne de la bordure, et du moyen : car ces nombres recomposent le carré central. Il y aurait donc six carrés magiques comme dans la croix à trois bandes, mais autrement disposés. On remarquera que la bordure est différente des bordures ordinaires, n'ayant les complémens ni aux cases correspondantes, ni aux cases symétriques : ils se trouvent sur les mêmes lignes horizontale et verticale que leurs nombres, et cela résulte de la manière d'opérer. Il n'y a donc pas réellement de bordure.

On pourrait également réduire à 3 bandes et à un carré central de 9 cases avec bordure, le carré de 13 (*fig.* 142, *planche* XXV), dont le carré central est celui de 5, ou dont les branches ont 5 bandes, et ainsi des autres. Cela fournit une foule de nouvelles combinaisons. On peut aussi faire disparaître les bandes de croix à l'exception de celle du milieu, de manière à obtenir double bordure fautive. On donne (*planche* XXIII *bis, figure l*) ce carré de 13, tiré de la figure 142. On a laissé en blanc les carrés partiels. Il est plus commode d'agir successivement, en commençant par les lignes les plus extérieures de la croix. On n'est pas forcé, lorsque le carré central a plus de 3 à la racine, d'avoir le moyen au centre.

Il ne faut que regarder le carré de la figure 142, et le comparer à celui que l'on donne ici, pour ne pas être embarrassé sur la place des nombres : ainsi tous ceux qui ne couvrent pas les carrés partiels, c'est-à-dire les nombres

du carré central, ne le couvrent pas davantage dans la fausse bordure simple ou multiple. Ce genre de carré est à retenir par sa forme élégante. On n'aura toujours que six carrés magiques, savoir : les quatre partiels, celui formé avec les 16 nombres aux angles, le moyen, et les 8 du milieu des quatre côtés de chaque bordure : en tout 25; enfin le carré total, sans y comprendre celui qui résulte de la réunion des 4 carrés partiels. Ce nombre 6 est constant pour tous les carrés à croix dans lesquels il y a 4 carrés partiels égaux : car le carré dans l'enceinte des bordures n'est pas magique, non plus que ceux qui ne comprendraient qu'une partie des bordures; on est obligé de les prendre toutes pour avoir le carré magique.

Si le carré central avait des bordures, il y aurait autant de carrés magiques de plus que de bordures.

DEUXIÈME SECTION.

CROIX SANS CARRÉS PARTIELS.

Dans ces carrés il faut que les parties séparées par la croix forment un carré lorsqu'elles sont réunies. Ces parties peuvent d'ailleurs être composées d'un nombre de cases pair ou impair; mais, comme deux de ces parties réunies donnent toujours une somme paire, et que le plus petit carré pair est celui de 4, il suit que, si d'une racine donnée on ôte 4, on aura le maximum des bandes dont une branche de croix peut être composée; le minimum sera 2 pour les carrés pairs, et 3 pour les impairs. On va donner plusieurs exemples.

Le plus petit nombre qui puisse avoir une croix est le carré de 6. On commencera par cette racine.

ARTICLE PREMIER.

CARRÉ DE 6.

On formera le carré de 4 à l'ordinaire, et on le distribuera dans les 16 cases qui ne font pas partie de la croix, comme si elles étaient réunies en un seul carré. Il s'ensuit que les 4 nombres de ce carré, sur une même ligne, seront ceux du carré de 4; mais, comme il n'y a que deux bandes à chaque branche de croix, on déterminera la 1.re horizontale et la 1.re verticale par les différences. Chaque couple vaut 37, le moyen est 18,5. Voici le tableau des différences, en supposant qu'on ait pris pour le carré partiel les 8 premiers et les 8 derniers nombres.

9+9,5—28	13+5,5—24	16+2,5—21
10+8,5—27	14+4,5—23	17+1,5—20
11+7,5—26	15+3,5—22	18+0,5—19
12+6,5—25		

La verticale peut être 9,5+8,5—6,5—7,5—5,5+1,5=0
L'horizontale........ 4,5—3,5+6,5—2,5—5,5+0,5=0

Substituant les nombres aux différences, et mettant les complémens aux secondes verticale et horizontale, on aura le carré (*figure* 146, *planche* XXVI).

Si l'on faisait disparaître la croix, on aurait carré avec bordure régulière, les complémens se trouvant aux cases correspondantes.

Lorsque le nombre de bandes des branches excède 2, on peut obtenir bordure simple, double, triple, etc.; mais on a déjà fait observer que ces bordures diffèrent des bordures ordinaires, en ce sens, que le carré renfermé n'est

pas magique, à moins qu'il ne soit la réunion des parties qui étaient séparées par la croix.

ARTICLE II.

CARRÉ DE 7.

Après avoir fait à l'ordinaire le carré de 4, que l'on suppose composé des 8 premiers et des 8 derniers nombres, et l'avoir placé autour des 4 angles, on peut prendre pour le carré central les différences 0, 4, 8, 12, 16, et leurs complémens; ou mieux, les nombres qui y correspondent, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37, 41. On construit aisément avec ces nombres, dont le moyen fait toujours partie, le carré central. Les quatre grandes différences restantes, 15, 14, 13, 11, ont pour somme 53; et les huit petites, 10, 9, 7, 6, 5, 3, 2, 1, sont égales à 43. La différence est 10, dont la moitié est 5. Que l'on substitue 9 au lieu de 14 parmi les grands, et réciproquement : on pourra faire les 4 groupes 9=7+2.... 15=14+1.... 13=10+3.... 11=6+5; et, substituant les nombres, il viendra le carré (*figure* 147, *planche* XXV). On verra (*figure* 148, *planche* XXV) ce même carré de 7 avec fausse bordure et bande isolée, partageant le carré angulaire, devenu carré central.

Lorsqu'on fait passer des différences des petites aux grandes, et réciproquement, il ne faut pas qu'il y ait impossibilité à former les groupes : ainsi on ne pourrait mettre 10 au lieu de 15 : car on ne pourrait comparer aucune grande différence à 15, qui serait plus grand qu'aucune des grandes différences restantes, et ainsi des autres. Si l'on substituait, par exemple, 6 au lieu de 11, on ne

pourrait faire que 6=5 + 1; mais alors 15 ne pourrait se composer d'aucun des petits nombres. Il faut faire grande attention à cette impossibilité, et particulièrement dans le cas de groupes n'ayant que 3 termes.

ARTICLE III.

CARRÉ DE 8.

Que l'on construise le carré de 6 à l'ordinaire, qu'on le distribue aux 4 angles : il restera croix à 2 bandes par tranche. Qu'on ait choisi les 18 premiers et 18 derniers nombres; on peut faire avec les différences restantes :

Horizont. 13,5—11,5+ 6,5+3,5+ 0,5—4,5—5,5—2,5
Verticale 13,5+11,5+12,5—9,5—10,5—8,5—7,5+1,5

Substituant les nombres aux différences, il viendra le carré (*figure* 149, *planche* XXIV).

Si l'on ne fait que le carré de 4 avec les 8 premiers et 8 derniers nombres, on pourra prendre, savoir :

1.re v. 23,5+22,5+21,5—20,5—19,5—18,5—17,5+ 8,5
2.e v. 16,5+15,5+14,5+ 1,5—10,5—11,5—12,5—13,5
1.re h. 23,5+14,5—21,5—15,5+ 6,5+ 7,5— 9,5— 5,5
2.e h. 22,5—13,5— 8,5— 1,5+ 3,5+ 2,5— 4,5— 0,5

Qu'on substitue les nombres aux différences, ayant soin de mettre dans les verticales et horisontales complémentaires les complémens convenablement : il viendra le carré (*figure* 150, *planche* XXIV); mais le carré d'intersection n'est pas magique.

Le carré (*figure* 151, *planche* XXIV) n'est que le précédent, dans lequel on a fausse bordure.

On pourrait faire disparaître de cette figure 151 la croix : on aurait alors une bordure fausse double, et l'on aurait toujours deux carrés magiques exacts, savoir, le central et le total. Il en serait de même de celui de la figure 149.

On pourrait encore, dans le carré de la figure 150, faire le carré central magique : on agirait alors par groupes. Qu'on ait choisi pour ce carré central les 8 nombres qui suivent les 8 premiers, et les 8 qui précèdent les 8 derniers, et qu'il ait été construit régulièrement et magiquement : on pourrait obtenir 4 groupes de 4 différences chacun, en les comparant 2 à 2, par exemple : 15,5+12,5—14,5—13,5=0... 11,5+8,5—10,5—9,5=0.... 7,5—4,5—6,5—5,5..... 3,5+0,5—2,5—1,5. On placera ces groupes où l'on voudra, pourvu qu'il n'y en ait que 2 en horizontale, et 2 en verticale ; les groupes complémentaires achèveront le carré. Il viendra par ce moyen 3 carrés magiques : celui des angles, le central et le total.

ARTICLE IV.

CARRÉ DE 9.

On a choisi pour le carré de 9 (*fig.* 152, *planche* XXVI) une croix à branches de 5 bandes ; les nombres qui composent le carré de 16 sont les suivans : 1, 4, 7...22, et leurs complémens. Le carré central de 25 a été construit d'après la méthode expéditive avec les nombres 5, 8, 11... 41, et complémens, de 3 en 3. Il est resté les nombres et les différences, savoir :

2 + 39 — 80		24 + 17 — 58	
3 + 38 — 79		25 + 16 — 57	
6 + 35 — 76		27 + 14 — 55	
9 + 32 — 73		28 + 13 — 54	
12 + 29 — 70	(5)	30 + 11 — 52	(20)
15 + 26 — 67	(7)	31 + 10 — 51	
18 + 23 — 64	(8)	33 + 8 — 49	(23)
21 + 20 — 61	(11)	34 + 7 — 48	(26)
		36 + 5 — 46	(29)
		37 + 4 — 45	
		39 + 2 — 43	
		40 + 1 — 42	

Il faut que deux différences soient égales à 3 autres. Or les 8 plus grandes ont pour somme 242, et les 12 plus petites valent 108; l'excès est 134, dont la moitié, 67, doit passer des grandes aux petites. Si donc on transporte les quatre grandes différences, 20, 23, 26, 29 = 98, parmi les petites, on aura ajouté à celles-ci 98—67=31 de trop: il faut donc faire passer parmi les grandes quatre petites différences dont la somme soit 31. On a choisi 5, 7, 8, 11, et l'on a fait les 4 groupes de différences :

39 + 5 — 29 — 14 — 1 = 0
38 + 8 — 23 — 13 — 10 = 0
35 + 11 — 26 — 16 — 4 = 0
32 + 7 — 20 — 17 — 2 = 0

Substituant les nombres aux différences, il viendra le carré (*figure* 152).

Si l'on transpose les nombres des bandes extérieures de la croix, on aura fausse bordure (*figure* 153).

Si dans ce nouveau carré on transporte deux bandes, il viendra croix à une seule bande, et bordure double fausse. Les lignes de cette bordure double peuvent changer de place, de manière que la bordure intérieure devienne l'extérieure, et réciproquement.

On peut aussi faire croix à 3 bandes par branche. Soient, si l'on veut, choisis les 18 premiers et 18 derniers nombres pour le carré de 6, qui sera distribué aux angles; soient prises, de plus, pour le carré central, les trois progressions 32·33·34.... 40·41·42... 48·49·50. Il restera les nombres et les différences comme suit

19 + 22 — 63		25 + 16 — 57	
20 + 21 — 62		26 + 15 — 56	
21 + 20 — 61		27 + 14 — 55	(17)
22 + 19 — 60		28 + 13 — 54	
23 + 18 — 59		29 + 12 — 53	
24 + 17 — 58	(14)	30 + 11 — 52	
		31 + 10 — 51	
		35 + 6 — 47	
		36 + 5 — 46	
		37 + 4 — 45	
		38 + 3 — 44	
		39 + 2 — 43	

Les 8 grandes différences ont pour somme 117, et les 12 petites, 111 : la différence entre ces deux sommes est 6, dont la moitié, 3, doit être ajoutée aux petites. Qu'on substitue 17 au lieu de 14, et réciproquement : on pourra faire les groupes de différences 22—10—12=0.... 21—15—6 =0.... 14—11—3=0.... 20—16—4=0.... 19—17—2

=0..... 18—13—5=0. On aura, en substituant les nombres aux différences, le carré (*planche* XXIII *bis*, *figure m*).

On peut ne laisser qu'une bande à la croix, et faire une fausse bordure, comme dans la figure 154. On a ici trois carrés magiques : le central, celui des angles, et le carré total.

ARTICLE V.

CARRÉ DE 14.

On a choisi pour ce carré les nombres suivans. Le carré de 8, qui est celui des angles, est composé des 32 premiers et 32 derniers nombres; le carré central de 6 est formé avec les 36 nombres du milieu. Il reste ceux de 33 à 80, dont les différences sont de 18,5 à 65,5, avec lesquelles on a fait les groupes.

65,5+64,5—63,5—62,5—61,5+57,5=0
60,5+59,5—58,5—56,5—55,5+50,5=0
54,5+53,5+45,5—49,5—51,5—52,5=0
48,5+47,5+38,5—43,5—46,5—44,5=0
42,5+41,5+33,5—40,5—39,5—37,5=0
36,5+35,5+26,5—31,5—32,5—34,5=0
30,5+29,5+21,5—28,5—27,5—25,5=0
22,5+23,5+18,5—24,5—19,5—20,5=0

Le carré résultant se voit (*figure* 155, *planche* XXVII.)

On trouve aussi (*figure* 156, *planche* XXVII), le même carré de 14 avec fausse bordure.

Le carré (*figure* 157) est construit avec bordure double fausse.

Enfin le carré (*figure* 158) aura bordure triple exacte; les quatre parties du carré sont réunies, et deviennent carré central, qui se composait, dans les trois autres figures, des 36 cases autour des angles. Le carré total est magique, mais il faut prendre les trois bordures réunies, ou la triple bordure.

On remarquera que dans la figure 156 le carré central n'est pas magique. Il ne le serait qu'en y ajoutant les 4 angles et les 4 cases du milieu de la fausse bordure, pour reconstruire le carré d'intersection de la figure 155.

On voit, d'après tout ce qui précède, qu'il y a deux espèces de fausses bordures : l'une fausse en elle-même, parce que les complémens sont aux cases symétriques, et que le carré qu'elle renferme, peut être magique sans elle, et cesse de l'être si elle est jointe à ce carré; l'autre est telle que le carré, au contraire, n'est magique qu'autant qu'il est réuni à la bordure simple, ou double, ou triple, etc.

Les 4 figures du carré de 14 montrent bien comment l'on passe de l'une à l'autre. Il importe peu par laquelle on commencerait. Ainsi, que l'on veuille partir de la figure 158; elle se formerait comme suit.

On construirait d'abord le carré central de 8 avec les 32 premiers et 32 derniers nombres; ensuite le carré de 6, qu'on distribuera autour des 4 angles, et par ordre, comme si ces parties ne formaient qu'un seul carré, et qu'elles fussent réunies. On ferait ensuite 8 groupes avec les différences restantes; et après la substitution des nombres aux différences, on en mettrait 4 en horizontale, et autant en verticale, les uns et les autres coupés par le carré central

en deux moitiés, puis dans les mêmes lignes les groupes complémentaires coupés de même par le carré central. On peut voir la figure 158. On a déjà fait remarquer que les groupes complémentaires se plaçaient à volonté, de manière cependant que les nombres dont ils sont composés, se trouvent sur une même ligne avec ceux dont ils sont les complémens.

ARTICLE VI.

CARRÉ DE 11.

On suppose 7 bandes aux branches de la croix. Il est déjà remarqué que dans les carrés impairs il restera toujours une bande que l'on ne peut retirer pour en faire partie de bordure : la croix peut donc être réduite à cette seule bande.

Soient choisis ici, pour le carré de 4, les 8 premiers et 8 derniers nombres, et pour le carré central d'intersection les nombres 37, 38.... 61 et complémens. Ce carré central étant construit par la méthode expéditive, il reste les différences de 9 à 36 pour les nombres. Ces différences sont 25, 26... 52; les 12 plus grandes, de 41 à 52, ont pour somme $(41+52)\frac{12}{2}=93\cdot6=558$. Les 16 plus petites, de 25 à 40, donnent $(25+40)\frac{16}{2}=65\cdot8=520$ pour somme; la différence des deux sommes est 38, dont la moitié 19 doit être ajoutée aux petites. Si l'on fait passer par exemple $41+42=83$ des grandes dans les petites, et $31+33=64$ des petites dans les grandes, on aura $83-64=19$, et l'on pourra faire les groupes

51+50+33—40—41—26—27=0
52+49+31—42—37—28—25=0
46+47+48—38—35—39—29=0
43+44+45—34—36—32—30=0

On aura, après substitution des nombres aux différences, le carré (*figure* 159, *planche* XXVII).

On verra aussi (*figure* 160) le même carré de 11 avec bordure triple fausse.

ARTICLE VII.

CARRÉ DE 12.

Si l'on veut commencer par le carré central de 6 avec bordure fausse triple, on peut prendre les 18 premiers et 18 derniers nombres pour le carré central; puis les 36 du milieu, de 55 à 90, pour le carré distribué aux angles, lequel deviendra carré d'intersection. Avec les différences restantes on pourra former les groupes suivans : les 18 grandes différences, de 36,5 à 53,5, ont 810 pour somme; les 18 petites, de 18,5 à 35,5, ne donnent que 486. La différence des deux sommes est 324, dont la moitié, 162, doit augmenter la somme des petites. Si l'on fait passer 37, 39, 40, 43, 44, 46, 49, 50, 51, des grandes parmi les petites, la somme=399; mais si l'on transporte parmi les grandes les 9 petites, 18, 22, 23, 21, 29, 30, 26, 33, 35=237, on aura 399—237=162. On omet ici les demi-unités : elles sont supposées, ainsi que dans les groupes; on peut avoir ceux-ci comme suit :

53+52+45—49—50—51=0
47+48+38—43—44—46=0
42+41+33—37—39—40=0
36+35+26—31—32—34=0
30+29+21—25—27—28=0
23+22+18—19—20—24=0

Substituant les nombres aux différences, et mettant les complémens, comme il a été expliqué, on aura le carré (*figure* 161, *planche* XXVIII).

Pour revenir de ce carré, qui a triple fausse bordure à la croix, il n'y a qu'à distribuer le carré central aux angles, et rassembler au milieu les carrés non magiques des angles, et dont la réunion fera un carré magique : la place des groupes n'éprouve pas de difficulté (*figure* 162, *planche* XXVIII).

Le carré de 14 peut, par ce moyen, être construit plus brièvement que par la méthode donnée précédemment. On verra ce carré (*planche* XXVIII, *figure* 163).

Il est à remarquer que, dans le carré de 12, ayant fait deux carrés de 36 cases magiquement, il importait peu que ce fût l'un plutôt que l'autre qui fût au centre : ainsi les figures 161 et 162 ne sont que la même, dans laquelle on a changé de place les carrés de 6.

On terminera par le carré de 17.

ARTICLE VIII.

CARRÉ DE 17.

On a pris pour le carré de 8 (*planche* XXIX, *figure* 164), séparé par une bande, les nombres de 1 à 32 et leurs complémens. On a ensuite composé le carré de 9 avec les

81 nombres du milieu; il est distribué aux angles, au milieu des 4 bordures, ou plutôt de la bordure quadruple, et au centre de la bande, pour le moyen; il est formé par la méthode expéditive. Il faut encore 8 groupes de 9 différences. Il reste les nombres de 33 à 104; les différences sont de 41 à 112; le moyen est 145, valeur moyenne de chaque nombre. Les 32 plus grandes ont pour somme 3088; et les 40 plus petites, 2420. La différence est 668, dont la moitié, 334, doit être ajoutée aux petites différences. Que l'on prenne parmi les grandes, par exemple, 99, 100, 101, 102, 103, 104=609 : on aura 609 — 334 =275. Il faut choisir 6 petites différences qui aient cette somme; qu'elles soient 41, 43, 44, 48, 49, 50=275. On formera les groupes comme suit :

112+111+110+41— 99—80—79—74—42=0
109+108+107+43—104—78—77—57—51=0
106+105+ 98+44—103—76—75—52—47=0
97+ 96+ 95+48—102—73—62—53—46=0
94+ 93+ 92+49—101—72—56—45—54=0
91+ 90+ 89+50— 64—65—66—70—55=0
88+ 87+ 86+81—100—58—60—61—63=0
85+ 84+ 83+82— 71—69—68—67—59=0

Substituant les nombres aux différences, on aura le carré de la figure 164.

Du carré ci-dessus on tire celui (*figure* 165) avec croix à branches de 9 bandes; le carré central de la figure 164 devient celui des angles de la figure 165; et au contraire celui des angles, avec le moyen et le milieu des 4 lignes de chaque bordure, devient le carré d'intersection.

Il résulte du détail donné sur la manière de faire les croix dans les carrés magiques, que les racines paires doivent être considérées autrement que les impaires. Dans les carrés pairs il y a deux méthodes pour construire les croix. Les carrés impairs n'ont que celle des groupes. On verra dans le paragraphe suivant une autre forme que l'on peut donner aux carrés, et qui a du rapport avec les croix. Souvent l'une des formes peut se changer dans l'autre. On fera remarquer ces transformations.

Il y a encore les fausses croix, non point celles dont on a vu des exemples, et qui sont telles que le carré avec elles n'est pas magique lorsqu'il y a bordure fausse; mais il s'agit de croix qui ne partagent pas le carré également. Comme ce genre de croix a plus de rapport aux anomalies des carrés qu'aux vraies croix, on ne s'en occupera qu'en traitant des bandes isolées qu'on peut distribuer dans les carrés sous certaines conditions. On va passer aux châssis.

§ 6.

CHASSIS.

Les châssis se composent de 4 branches qui se coupent. Chacune d'elles peut, comme dans les croix, être composée de plusieurs bandes, en nombre pair ou impair. Les parties séparées par ces branches peuvent être des carrés ou portions de carré : d'où résulte la division en deux sections.

Il y a encore des châssis à plus de 4 branches, de faux

châssis, etc. On traitera successivement de ces différentes constructions.

PREMIÈRE SECTION.

LES CHASSIS PARTAGENT LE CARRÉ EN 9 CARRÉS PARTIELS.

Le plus petit carré ayant 3 de racine, il suit que la plus petite racine qui puisse avoir un carré avec châssis est 11. Mais 12 ne peut jouir du même avantage : car 9 ôté de 12, resterait 3, nombre impair, tandis qu'on doit avoir un nombre pair pour que le châssis soit régulier. Mais tous les autres nombres peuvent donner carré à châssis.

On vient de dire qu'on devait avoir un nombre pair pour reste de la soustraction des côtés de 3 carrés partiels; et en effet, si les côtés de ces carrés sont composés d'un nombre impair de cases, leur somme sera impaire, et il faudra que le moyen en fasse partie. D'un autre côté, comme on suppose qu'il reste un nombre impair, les intersections des bandes comprendront un nombre impair de cases, dont le moyen doit aussi faire partie, ce qui ne se peut, puisqu'il fait partie des carrés. Il n'en serait pas de même si les côtés des carrés partiels ont un nombre pair de cases : on pourrait alors mettre le moyen dans les intersections. Ainsi, pour 15 de racine, par exemple, si les carrés partiels ont 3 cases pour racine, on aura 15—9=6, nombre pair. Mais si les carrés partiels sont de 4 cases à la racine, il viendrait 15—12=3, chose possible. Dans ce cas il y aurait châssis de 3 bandes en tout; les intersections auraient 9 cases; mais

le châssis ne serait pas régulier, puisqu'il y aurait deux bandes à l'une des branches, et une bande à l'autre.

Maintenant, la racine de tout carré à châssis peut être représentée par $3a+2n$. a représente le côté d'un carré partiel, et $2n$ le nombre des bandes des deux branches parallèles d'un châssis : ainsi $a = > 3$, puisque ce nombre 3 est le côté du plus petit carré. Soient donc $a = 3 = 4 = 5 = 6$, etc., et $n = 1$: on aura 11, 14, 17, 20, etc. Tous ces nombres peuvent n'avoir que 2 bandes parallèles, mais ils peuvent en avoir davantage. Par exemple, 17 peut être $= 17 - 9 = 8$. Chaque branche du châssis aurait donc 4 bandes. De même $20 = 12 + 8 = 18 + 2$: on ne pourrait supposer $a = 3 = 5$: car il viendrait $20 = 9 + 11 = 15 + 5$; on voit qu'il resterait un nombre impair pour représenter $2n$, ce qui est impossible lorsque le châssis doit être régulier. Le minimum et le maximum une fois déterminés, les nombres de bandes des deux branches parallèles seront, de 6 en 6, les intermédiaires entre ce maximum et ce minimum. Ainsi 23, qui peut avoir 2 ou 14 bandes, en aurait aussi 8. Le nombre 38, qui a 2 pour minimum et 26 pour maximum, en aurait encore $2+6 \ldots 2+12 \ldots 2+18$, ou 8, 14, 20, et ainsi des autres. Le minimum, pour tous les nombres de cette catégorie, est toujours 2. Quant au maximum, il faut ôter de la racine 9 pour les impairs, et 12 pour les pairs.

Si l'on veut connaître le rang d'une racine donnée dans la catégorie ci-dessus, et si cette racine en fait partie, on soustrait 11 de cette racine, et il faut que le reste se divise par 3. Le quotient, augmenté de l'unité, indique le rang de cette racine. 38, par exemple, donne $38 - 11 =$

27, lequel se divise par 3 : donc 38 fait partie de la série 11, 14, 17, etc. $\frac{27}{3}=9$: donc $9+1=10$ est le rang de 38 dans la série; ou bien $\frac{r-11}{3}+1=\frac{r-11+3}{3}=\frac{r-8}{3}$.

Soit $n=2$: on aura $3a+2n=13, 16, 19, 22$, etc., en faisant successivement $a=3=4=$etc. Ici le minimum des bandes est 4. Quant au maximum, on ôtera toujours 9 des impairs, et 12 des pairs; ensuite, de 6 en 6, entre ces extrêmes, on aura le nombre des bandes : ainsi, pour 31, le maximum est 22 : il y aurait donc 4, 10, 16, 22 bandes parallèles; 34 en aura autant.

Pour connaître si une racine appartient à cette catégorie, il faut ôter 13 de cette racine, et le reste doit se diviser par 3. Le rang de cette racine sera $\frac{r-13}{3}+1=\frac{r-10}{3}$.

Soit $n=3$: il viendra, pour $a=3=4=5$, etc., $15=18=21=$etc., et l'on aura pour minimum 6 bandes, ou 3 à chaque branche parallèle : ainsi 6 est le minimum. Le maximum s'obtient toujours en soustrayant 9 des impairs et 12 des pairs; et les bandes intermédiaires sont de 6 en 6 : ainsi 39, ayant 30 pour maximum, peut être de 6, 12, 18, 24, 30 bandes. 42 aurait le même résultat.

Pour connaître si une racine donnée appartient à cette catégorie, il faut que $r-15$ se divise exactement par 3; le rang de cette racine sera $\frac{r-15}{3}+1=\frac{r-12}{3}$.

Il suit de ce qui précède, qu'on reconnaît à quelle catégorie appartient une racine, suivant que $r-8$, $r-10$, $r-12$, sont divisibles ou non par 3. Si $\frac{r-8}{3}$ est un quotient exact, la racine appartient à la série qui commence par 11. Si $\frac{r-10}{3}$ est exact, la série commence par 13. Enfin, si $\frac{r-12}{3}$ est quotient exact, la série commence par 15. Dans les 3 cas les termes de chaque série sont en progression arith-

métique dont la raison est 3. Les minimum sont 2, ou 4, ou 6.

Soit $n=4$: on aurait 17 • 20 • 23, etc. ; on retomberait sur le 1.er cas.

$n=5$ donnerait 19 • 22 • 25, etc., qui est le 2.e cas.

$n=6$ fournit 21 • 24 • 27, etc. ; on retrouve le 3.e cas.

Il suit que le minimum des bandes par branche ne peut être que 1, 2, 3. Il suffit donc de faire $n=1=2=3$, et $a=3$ pour les impairs, et 4 pour les pairs. On voit que 12 ne fait partie d'aucune supposition.

Maintenant, si les carrés partiels sont impairs, ils ne peuvent être égaux : ils seront donc distribués, comme de simples nombres, d'après les formules connues pour le carré de 3. Il est clair que le moyen fera partie du 5.e carré, sans qu'on soit obligé de lui faire tenir la place du milieu, toutes les fois que le carré central est composé de plus de 9 cases. S'il est nécessaire que la différence entre les progressions de chaque carré soit la même, il ne l'est pas que les intervalles soient les mêmes : car ils peuvent varier entre la 3.e et la 4.e série : ainsi, pour 11, si l'on choisit 1 • 2 • 3... 9...... 12 • 13 • 14... 20 ...... 23 • 24 • 25... 31 pour les trois premières progressions, comme la 5.e serait 57 • 58 • 59 • 60 • 61 • 62 • 63 • 64 • 65, il faut que la 4.e soit 46 • 47 • 48... 54 : d'où l'on voit que l'intervalle entre la 3.e et la 4.e série est 15, tandis qu'il n'est que 3 entre la 1.re et la 2.e, et entre la 2.e et la 3.e. Les autres composent les complémens suivant l'ordre des premières.

Si les carrés partiels sont pairs, on peut les faire égaux ou inégaux. Dans le dernier cas on les arrange comme

pour le carré de 3. S'ils sont égaux, on les placera comme on voudra. Un grand nombre d'exemples mettra sur la voie de composition de ce genre de carrés.

Comme tout nombre est multiple de 3, ou le devient en soustrayant l'unité ou deux unités de ce nombre, il suit que, dans le 1.er cas, chaque branche du châssis aura 3 bandes, que ce nombre soit d'ailleurs pair ou impair. S'il surpasse d'une unité un multiple de 3, chaque branche aura 2 bandes. Elle n'en aura qu'une si le nombre surpasse de deux unités le multiple de 3. Il ne s'agit ici que d'un minimum, chaque branche pouvant augmenter de 3 bandes à partir du minimum. Ceci n'est qu'une autre manière d'exprimer la règle donnée plus haut.

ARTICLE PREMIER.

CARRÉ DE 11.

Il est clair que les branches n'ont qu'une bande. Soit choisie la progression continue 21 • 22... 61... 100 • 101 pour les 9 carrés; le moyen devant être le centre de la progression. Les différences des nombres restans 1, 2, 3... 20 et complémens sont 41, 42, 43... 60, avec les signes + ou —. Soit la 1.re horizontale 56+57+58+59+60—45—47—48—49—50—51=0; la 1.re verticale, 60—58+52+53+54+55—41—42—43—44—46=0. Les complémens achèveront le carré à l'ordinaire; mais on peut agir directement sur les nombres. Par exemple, soit l'horizontale 117+118+119+120+121+10+11+12+13+14+16=671=11 • 61. Que la verticale soit composée avec les nombres restans 113+114+115+116+15+

17+19+18+20=547: il faut encore 124 pour faire 671, et ces 124 doivent comprendre un nombre de l'horizontale avec son signe, et un autre avec signe contraire, ou le complément d'un autre : or 120 et 4 satisfont à la condition : car 4 est complément de 118. On mettra donc 120 à la 1.re intersection, et 118 à la seconde. Les complémens 2 et 4 seront diagonalement placés aux autres intersections. Les autres nombres des lignes ci-dessus se placent à volonté dans leur ligne respective, et les complémens achèvent le châssis. Ces nombres diffèrent de ceux que les différences ci-devant choisies auraient donnés : car il y a beaucoup de manières d'arriver au même but. On verra le carré (*figure* 166, *pl.* XXIX).

Ce carré devient celui de la figure 167, avec bordure exacte, et cela aura lieu toutes les fois que les branches n'auront qu'une bande. Si le carré de cette dernière figure n'était pas à compartimens, et que l'on revînt de cette figure 167 à la figure 166, les carrés partiels ne seraient plus magiques. Si donc on peut toujours changer un carré à croix en carré à bordure, on ne peut réciproquement changer ce dernier en carré à croix, qu'autant que le carré central est divisé en 9 carrés à compartimens, cela devant s'entendre des carrés impairs, et des pairs lorsque ceux-ci n'ont pas les carrés partiels égaux.

La figure 168 présente le carré central sans compartiment, et avec la bordure tirée du châssis; mais, comme on vient de le dire, les carrés partiels ne seraient pas égaux.

ARTICLE II.

CARRÉ DE 14.

La racine étant paire, si l'on soustrait 12 de 14, il ne reste qu'une bande à chaque branche; ces carrés partiels sont ceux de 4. Si l'on choisit pour ces carrés les progressions 3 • 4 • 5... 18...... 25 • 26 • 27... 40...... 47• 48 • 49... 62...... 69 • 70... 84...... 91 • 92... 106..... 113 • 114... 128...... 135 • 136... 150...... 157 • 158... 172...... 179 • 180... 194, on voit que les 4 dernières renferment les complémens des 4 premières, et que la 5.e comprend les 16 nombres du milieu. Comme ces carrés ne sont pas égaux, il faut les arranger comme si chacun ne représentait qu'un seul nombre. Voir (*figure* 169, *planche* XXVIII).

Il reste les nombres et les différences

1+97,5—196	46+52,5—151
2+96,5—195	63+35,5—134
19+79,5—178	64+34,5—133
20+78,5—177	65+33,5—132
21+77,5—176	66+32,5—131
22+76,5—175	67+31,5—130
23+75,5—174	68+30,5—129
24+74,5—173	85+13,5—112
41+57,5—156	86+12,5—111
42+56,5—155	87+11,5—110
43+55,5—154	88+10,5—109
44+54,5—153	89+ 9,5—108
45+53,5—152	90+ 8,5—107

La première horizontale, par les différences, peut être
97,5+96,5+79,5+78,5+77,5—76,5—75,5—74,5—56,5 —35,5—34,5—33,5—32,5—10,5

La verticale peut se former par
77,5+32,5+52,5+31,5+30,5+13,5+12,5—57,5—55,5 —54,5—53,5—11,5—9,5—8,5

Alors 21, répondant à 77,5, se trouve à la 1.re intersection, et 131, répondant à —32,5, à la seconde. Substituant les nombres aux différences, et plaçant convenablement les complémens, on achèvera le châssis.

On ramènerait facilement le carré de 14, figure 169, à un carré à compartimens de 12 de côté et à bordure exacte, en faisant le carré de 12 avec les 9 progressions choisies, d'après la méthode expéditive des impairs, et chaque carré partiel d'après la méthode expéditive des pairs; et l'on pourrait réciproquement revenir de ce dernier carré à celui de la figure.

On aurait pu aussi faire les 9 carrés égaux, en composant chacun d'eux de 8 nombres et de leurs complémens; enfin on pouvait tirer du carré de la figure bordure régulière et carré de 12 par la méthode connue.

ARTICLE III.

CARRÉ DE 13.

Il y aura ici deux bandes à chaque branche. Si l'on choisit les 81 nombres du milieu pour les carrés partiels, on procèdera à la formation des deux horizontales et des deux verticales avec les différences restantes. (*Figure* 170,

planche XXVIII.) Les nombres restans sont ceux de 1 à 44 et complémens; les différences sont de 41 à 84, et les lignes dont il s'agit peuvent être les suivantes. On sait que les verticales doivent avoir deux différences de chaque horizontale, dont une avec changement de signe.

1.re horizontale. $\left\{ \begin{array}{l} \overline{79}-\overline{67}+\overline{84}+\overline{80}+83+82+81-78-71 \\ -70-69-68-66=0 \end{array} \right.$

2.e horizontale. $\left\{ \begin{array}{l} \overline{73}-\overline{56}+\overline{74}-\overline{57}+77+76+75+60-72 \\ -65-64-63-58=0 \end{array} \right.$

1.re verticale.. $\left\{ \begin{array}{l} \overline{79}+\overline{67}-\overline{73}-\overline{56}+62+61+59+55-54 \\ -53-52-51-44=0 \end{array} \right.$

2.e verticale... $\left\{ \begin{array}{l} \overline{74}+\overline{57}+\overline{84}-\overline{80}+48+47+43-50-49 \\ -46-45-42-41=0 \end{array} \right.$

Il est bon de marquer d'un trait les différences communes, lorsque les lignes sont formées, afin de placer les nombres convenablement : ainsi

6, répondant à 79, dont le signe n'a pas changé, se trouvera à l'intersection des premières horizontale et verticale.

1, répondant à 84, dont le signe reste le même, sera à l'intersection de la première horizontale et de la 2.e verticale.

141, correspondant à—56, le signe restant le même, se placera à l'intersection de la 2.e horizontale et de la 1.re verticale.

11, dont la différence + 74 est constante, sera à l'intersection des secondes horizontale et verticale.

Les quatre intersections ci-dessus auront leurs complémens aux cases symétriques, que l'on sait déterminer.

Passant aux autres intersections,

La différence 80 étant positive à la 1.re horizontale, et négative à la 2.e verticale, il n'y a que les cases où se trouvent 5 et 165 son complément, qui conviennent à ces deux lignes; il en est de même de 152 et 18 répondant à —67 de la 1.re horizontale et +67 de la 1.re verticale. On aura encore 142 et 28 correspondant à —57 et +57 des secondes horizontale et verticale. Enfin 12 et 158, dont les différences sont +73 et —73, seront à la 2.e horizontale et 1.re verticale.

Une fois les cases d'intersection remplies, les autres nombres des horizontales et verticales se placent où l'on veut, dans leurs lignes respectives, au lieu de leurs différences, et les complémens achèvent le carré.

On verra (*figure* 171, *planche* XXVIII) le même carré avec fausse bordure première, mais la bordure double est exacte. Il n'y a que le cas où les branches n'ont qu'une bande, qui donne une bordure exacte; on se rend aisément raison de cette différence : car, avec une bordure seulement, on doit avoir le même carré magique qu'avec un châssis; mais, avec plusieurs bordures, on doit, puisque les bandes réunies et parallèles du châssis ne donnent qu'un seul carré magique, n'obtenir également qu'un carré avec les bordures réunies, et non avec une seule.

Il serait cependant possible que l'on pût passer d'un châssis à branche composée de deux bandes à bordures exactes. Il faut voir ce qui résulte d'un carré à bordures lorsqu'on le change en châssis. Soit pris le carré de 7 à bordures régulières (*planche* XXVIII *bis*, *figures n et o*).

Le carré central a été fait avec les nombres du milieu.

L'horizontale de la bordure extérieure a été formée avec les différences $\overline{22}+23+24-21-20-\overline{19}-9$, et la verticale avec $\overline{22}+\overline{19}+18-17-16-15-11$.

La bordure intérieure a été construite, savoir : l'horizontale par $14+13-\overline{12}-10-\overline{5}$, et la verticale par $\overline{12}+7-8-6-\overline{5}$

On remarque, dans le carré à châssis, que les nombres d'intersection autres que ceux des diagonales, forment un couple dans les mêmes lignes, comme 7 et 43, 14 et 36, 49 et 1, 34 et 16; on a aussi $42+8=33+17=50$. Cela peut se pratiquer ainsi dans tout châssis, si l'on juge convenable : d'où l'on peut conclure qu'on aura la possibilité de transformer un châssis à branches de deux bandes, en bordures régulières, toutes les fois que le châssis aura ses couples disposés comme on vient de le faire.

Qu'on construise encore le châssis de 13 de racine de manière que les 9 carrés partiels soient faits avec les 81 nombres du milieu, et que les bandes soient formées par les différences. (Voir *planche* XXVIII *bis*, *figures p* et *q*.)

Soient 1.re horizontale :

$$\overset{\text{2.v.}}{84}+83+82+81+80+\overset{\text{1.v.}}{79}-78-66-\overset{\text{1.v.c.}}{67}-68-69-70-71=0$$

2.e horizontale :

$$\overset{\text{2.v.}}{77}+76+75+74+\overset{\text{1.v.}}{62}+49-65-\overset{\text{2.v.c.}}{63}-\overset{\text{1.v.c.}}{62}-60-58-57-48=0$$

1.re verticale :

$$\overset{\text{1.h.}}{79}+\overset{\text{1.h.c}}{67}+\overset{\text{2.h.}}{62}+61+59+55-73-56-54-53-52-51-44=0$$

2.e verticale :

$$\overset{\text{1.h.}}{84}+\overset{\text{2.h.}}{77}+72+\overset{\text{2.h.c.}}{63}+42+41-64-50-47-46-45-43-\overset{\text{1.h.c.}}{84}=0$$

Ce genre de composition pour les lignes du châssis est remarquable, et nécessaire pour qu'il puisse se changer

en deux bordures régulières l'une et l'autre. En effet la bordure extérieure a l'angle supérieur de gauche commun avec la 1.re horizontale et la 1.re verticale. Il y a de plus un nombre commun à la 1.re horizontale et à la 2.e verticale; ce nombre a son complément dans la case opposée : la différence doit donc être positive et négative dans cette 2.e verticale, et commune avec la 1.re horizontale. C'est pourquoi cette 2.e verticale se compose de 84 et de —84. L'angle de droite supérieur doit avoir son complément dans la 1.re verticale : ce sera —67 à l'angle, et + 67 à l'angle inférieur de gauche. La 2.e horizontale ayant le complément d'un de ses nombres dans la même ligne, il faudra avoir une différence avec les deux signes, et de plus l'une d'elles sera commune avec la 1.re verticale. C'est ici 62, ou le nombre 23. Une autre différence est commune entre la 2.e horizontale et la 2.e verticale. C'est ici 77, ou le nombre 8. De plus il y a une autre différence avec changement de signe, commune aux mêmes lignes que les précédentes : c'est — 63 ou 148 à l'angle de la bordure intérieure, et + 63 ou 22 à l'angle opposé. Enfin la 1.re verticale aura un nombre dont le complément sera à la case opposée : c'est celui qui est sur la ligne inférieure de la bordure intérieure. Il est facile, en conséquence, de faire le châssis; et réciproquement, le châssis étant fait comme il est expliqué, de revenir à la double bordure. On procèdera par ordre : d'abord 6, répondant à 79, est à l'intersection des 1.re horizontale et 1.re verticale; la place de son complément est symétrique. Ensuite 8, correspondant à 77, est à l'intersection des 2.es verticale et horizontale; son complément 162 a sa place forcée, c'est la case symé-

trique. La différence — 67 à la 1.re horizontale, ayant son complément à la 1.re verticale + 67, il est facile de placer 152 et 18. De même — 63 à la 2.e horizontale et + 63 à la 2.e verticale auront pour nombres 148 et 22, faciles à placer. Maintenant 1, répondant à + 84, étant commun à la 1.re horizontale et à la 2.e verticale, aura son complément 169 répondant à — 84 dans la même verticale. 23, commun à la 2.e horizontale et à la 1.re verticale, aura son complément 147 sur cette horizontale. 129, qui est à l'intersection de la 1.re verticale et de la 3.e horizontale, aura son complément sur cette horizontale; mais on pourrait prendre tout autre des nombres de cette verticale, excepté ceux dont le placement est fait. 151 et son complément 19 sur une même verticale peuvent aussi être l'un quelconque des non placés de cette verticale. En résumé, ayant composé à volonté la 1.re horizontale avec les différences, la seconde horizontale n'aura point de différence commune avec la première, mais elle en aura une avec le double signe. Passant aux verticales, la première aura deux différences de la 1.re horizontale, dont une avec changement de signe, et l'une des différences qui entrent avec les deux signes dans la 2.e horizontale. Quant à la 2.e verticale, elle aura deux différences de la 2.e horizontale, dont l'une avec changement de signe, et une de la 1.re horizontale, qui aura les deux signes.

ARTICLE IV.

CARRÉ DE 21.

Comme 21 se divise exactement par 3, on peut avoir les

branches de 3 bandes; elles pourraient en avoir 6. Que ces bandes soient au nombre de 3 : il restera 15, dont le tiers est 5 : donc il viendra 9 carrés de 5. Il faudra 225 nombres pour les former. Qu'on choisisse les 225 nombres du milieu de la progression de 1 à 441 : ce seront les nombres de 109 à 333. On distribuera les carrés partiels, considérés chacun commè un seul nombre, d'après la méthode du carré de 3; on procèdera ensuite à la formation des 3 premières horizontales; et quant aux verticales, elles contiendront chacune deux différences de chaque horizontale, dont une avec changement de signe, pour les intersections des branches du châssis; les autres différences, ou les nombres qui les remplacent, se mettent à volonté dans les lignes qui les contiennent. Il est bon, avant de faire le placement, de marquer les différences communes par un signe, afin d'éviter la confusion qui pourrait s'introduire. On mettra un petit nombre au dessus des différences; on y ajoutera un petit *c* lorsque le signe sera changé. Cette marque est la première lettre du mot complément. Voici les différences des 3 premières horizontales et des 3 premières verticales :

HORIZONTALES.

$$211+212+213+214+215+216+217+218+219+220$$
$$-\overset{3}{190}-\overset{2.c.}{192}-193-\overset{2}{194}-195-196-197-198-\overset{3.c.}{199}$$
$$-\overset{1}{200}-\overset{1.c.}{201}=0$$

$$179+202+203+204+205+206+207+208+209+210$$
$$-177-181-\overset{2.c.}{182}-183-\overset{3}{184}-\overset{2}{185}-\overset{3.c.}{186}-\overset{1}{187}-188$$
$$-189-\overset{1.c.}{191}=0$$

$$169+170+171+172+173+174+175+176+178+180$$
$$-\overset{1}{153}-154-155-\overset{2.c,}{156}-\overset{3}{157}-158-159-\overset{2}{160}-161$$
$$-\overset{3.c.}{162}-\overset{1.c.}{163}=0$$

VERTICALES.

$$151+152+1\overline{63}+164+165+166+167+168+1\overline{91}+2\overline{01}$$
$$-140-141-142-143-144-145-146-147-1\overline{53}$$
$$-1\overline{87}-2\overline{00}=0$$
$$136+137+138+139+148+149+150+1\overline{56}+1\overline{82}+1\overline{92}$$
$$-120-121-122-123-124-125-126-127-1\overline{60}$$
$$-1\overline{85}-1\overline{94}=0$$
$$129+130+131+132+133+134+135+1\overline{62}+1\overline{86}+1\overline{99}$$
$$-128-113-114-115-116-117-118-119-1\overline{90}$$
$$-1\overline{84}-1\overline{57}=0$$

Il n'y a plus qu'à substituer les nombres aux différences, et faire attention aux cases d'intersection et à leurs correspondantes. Les autres nombres se placent à volonté entre les carrés partiels, chacun dans leur ligne. Les complémens achèvent le châssis (*figure* 172, *planche* XXX). La figure dispense de toute autre explication. La bordure triple que l'on obtiendrait autour du carré de 15, soit simple, soit à compartimens, devrait être prise en entier, pour que le carré total fût magique.

Il peut être curieux de rechercher quelle serait la composition d'un châssis, pour qu'on pût passer de ce châssis à trois bordures régulières. Il faut pour cela revenir de ces bordures à leur composition. On prendra le carré de 3 pour le carré central de la bordure.

Jetant les yeux sur le carré (*planche* XXVIII *bis*,

figure r), on voit que la 1.re horizontale est à volonté; la 2.e aura une différence avec double signe; la 3.e en aura 2, chacune avec double signe.

Quant aux verticales, la 1.re aura deux différences de la 1.re horizontale, dont une avec changement de signe, *a* et *b'*; une de la 2.e horizontale, qui sera l'une des deux différences qui ne diffèrent que par le signe; une de la 3.e horizontale, qui sera l'une des deux doubles différences ne différant que par le signe. La 2.e verticale aura une différence de la 1.re horizontale avec son signe, et cette même différence avec signe différent; plus une différence de la 2.e horizontale, et une autre avec signe changé de la même horizontale, *h* et *k'*; enfin une de la 3.e horizontale avec son signe : cette différence est l'autre des deux doubles de cette horizontale. La 3.e verticale aura une différence de la 1.re horizontale, et la même différence avec signe changé; une autre différence de la 2.e horizontale, et la même avec changement de signe; enfin une de la 3.e horizontale, et une autre avec signe changé de la même horizontale. Il faut que ces conditions soient satisfaites pour que le châssis puisse se changer en triple bordure régulière.

Soient, par exemple, les lignes comme suit (*planche* XXVIII *bis*, *figure s.*)

1.re horizont.	40+39+38+37—36—35—34—33—16
2.e horizont.	32+26+25+24—21—22—23— 9—32
3.e horizont.	31+20+18+13—17— 8— 6—20—31
1.re verticale.	40—39+32+31+30—29—28—27—10
2.e verticale.	38+26+20+19—15—14—11—25—38
3.e verticale.	37+24+18— 5— 7—12+ 6—24—37

Ce châssis se changera facilement en carré de 3 à bordures toutes exactes. Il en sera de même pour tous les châssis à 3 bandes par branche. On trouverait sans difficulté des règles de composition pour un plus grand nombre de bandes.

ARTICLE V.

CARRÉS DE 30 ET 34.

On verra (*figure* 173, *planche* XXXI) le carré de 30 partagé en 4 carrés de 14, par une croix à deux bandes. Deux des carrés partiels sont eux-mêmes partagés en 9 carrés de 4, par un châssis à une bande; les deux autres sont coupés, par une croix à 2 bandes, en 4 carrés de 6, dont 2 avec bordures. On a 35 carrés magiques, savoir: les 18 carrés de 4, et les 2 carrés partiels qui les comprennent; les 4 carrés de 6 sans bordure; les 4 carrés avec bordure, qui en renferment encore 4 autres dans l'enceinte, ce qui fait 8; les 2 carrés partiels qui contiennent ces derniers; enfin le carré total.

Comme dans chaque carré il entre des nombres avec leurs complémens, il suit que 4 quelconques des 18 carrés de 4 joints ensemble donneraient un carré magique; il en serait de même des 8 carrés de 6.

Il ne fallait qu'un peu d'ordre pour obtenir facilement le carré de 30.

On a choisi les 72 premiers nombres et leurs complémens pour les 9 carrés du premier à châssis. Ce châssis a été fait avec les différences des 26 nombres suivans. Chaque couple est de 901. Chaque nombre vaut 450,5; les diffé-

rences de 78 à 98 seront donc 377,5, 376,5.... 352,5.
Le châssis est résulté des lignes suivantes :

1.re verticale.. { 352,5 + 364,5 + 363,5 + 357,5 + $\overline{376}$,5
+ 353,5 + 359,5 — 362,5 — 358,5 — $\overline{369}$,5
— 356,5 — 355,5 — 354,5 — 370,5

1.re horizont.. { $\overline{376}$,5 + $\overline{369}$,5 + 375,5 + 368,5 + 373,5
+ 366,5 + 360,5 — 361,5 — 374,5 — 377,5
— 372,5 — 371,5 — 367,5 — 365,5.

Le 2.e carré à châssis a été construit avec les 98 nombres suivans et leurs complémens, ce qui s'est réduit à ajouter 98 à tous les nombres du premier carré, lorsque ces nombres sont au dessous de 450, et à soustraire le même nombre 98 de tous ceux qui excèdent 450.

Le premier carré à croix comprend les 98 nombres qui suivent les 196 premiers; il est divisé en 4 autres. Le premier à bordure est formé avec les nombres de 197 à 214 et complémens; on a réservé les 10 premiers pour la bordure. Le second est formé du premier, en ajoutant 18 aux petits nombres, et ôtant 18 des grands. Le second carré à croix comprend encore 2 carrés à bordures : l'un est composé, comme le premier, en ajoutant et soustrayant 36; le dernier se tire toujours du premier, auquel on ajoute 54, ou dont on retranche 54.

La première croix a été faite avec les 26 nombres suivans, c'est-à-dire avec les nombres de 269 à 294, par le moyen des différences, comme il suit :

1.re verticale.... { 181,5 + 179,5 + 170,5 + 156,5 + 162,5
+ $\overline{180}$,5 + $\overline{161}$,5 — 178,5 — 172,5
— 173,5 — 168,5 — 169,5 — 171,5
— 158,5

1.re horizontale.. $\left\{ \begin{array}{l} \overline{180},5 - \overline{161},5 + 165,5 + 176,5 + 175,5 \\ + 159,5 + 157,5 + 160,5 - 163,5 \\ - 164,5 - 177,5 - 166,5 - 167,5 \\ - 174,5. \end{array} \right.$

Le premier carré de 6 a été formé avec les nombres de 295 à 312; le second n'est que le premier, aux nombres duquel on ajoute 18, ou des nombres duquel on ôte 18, suivant qu'ils sont petits ou grands. Le 3.e carré de 6 n'est encore que le 1.er, avec l'addition ou la soustraction de 36; enfin le 4.e se forme par l'addition ou la soustraction de 54. La 2.e croix partielle se compose des nombres de 367 à 392. Il suffit d'ajouter 98 aux nombres de la 1.re croix, ou de les retrancher.

Quant à la grande croix, elle est formée des nombres qui restent de 393 à 508, ce qui donne 58 différences en plus et en moins, de 0,5 à 57,5; elle a été construite comme suit :

1.re verticale... $\left\{ \begin{array}{l} 45,5 + 44,5 + 43,5 + 42,5 + 41,5 + 40,5 \\ + 39,5 + 23,5 + 19,5 + 18,5 + 16,5 \\ + 15,5 + 14,5 + 13,5 - 7,5 - 8,5 - 9,5 \\ - \overline{49},5 - \overline{50},5 - 29,5 - 24,5 - 25,5 \\ - 26,5 - 27,5 - 28,5 - 55,5 - 56,5 \\ - 57,5 + 20,5 + 17,5 \end{array} \right.$

1.re horizontale. $\left\{ \begin{array}{l} \overline{50},5 - \overline{49},5 + 51,5 + 38,5 + 37,5 + 35,5 \\ + 34,5 + 33,5 + 32,5 + 31,5 + 22,5 \\ + 21,5 + 12,5 + 11,5 + 10,5 + 6,5 + 3,5 \\ + 52,5 - 53,5 - 54,5 - 46,5 - 47,5 \\ - 48,5 - 36,5 - 30,5 - 0,5 - 1,5 - 2,5 \\ - 4,5 - 5,5. \end{array} \right.$

On voit que rien n'a été plus facile que la formation de

ce carré de 30; que l'on ne s'est servi que de très-peu des différences, et que la majeure partie des nombres a été déduite d'autres nombres antérieurement placés.

Le carré de 34 (*figure* 174, *planche* XXXII) est coupé par un châssis à deux bandes par branche, ce qui donne 9 carrés de 10 : 4 sont divisés par une croix à deux bandes; 3 ont trois bordures; l'un des carrés en a deux, et le carré du centre n'en a point. L'on compte 37 carrés tous magiques dans cette figure, savoir : 5 pour chaque carré coupé par une croix, ce qui fait 20; quatre pour chaque carré à 3 bordures, ce qui donne 12 pour les 3; on en a 3 pour le carré à 2 bordures, 1 pour le carré simple et le carré total.

Les 8 premiers nombres (on suppose toujours que les complémens font partie des carrés, et l'on ne s'occupe que des 578 premiers nombres) sont conservés pour le grand châssis. Les 32 nombres suivans composent les 4 carrés partiels de 4 du 1.er carré de 10. On les prend 8 à 8, et ces carrés se forment par la manière expéditive; les 18 suivans, de 41 à 58, composent la croix.

Le 2.e des grands carrés avec croix se tire du précédent, en ajoutant 50 aux petits nombres, et retranchant 50 des grands. Le dernier nombre sera donc 108. Les 8 suivans, de 109 à 116, entreront dans le grand châssis.

Le carré sans bordure se construit avec les suivans, de 117 à 166.

Le carré de 10 à 3 bordures se forme avec les nombres de 167 à 216; les 8 derniers, de 209 à 216, composent le carré central de 4; les 8 suivans entrent dans le grand châssis.

Le 3.e carré de 10 avec une croix se tire du premier, en ajoutant 216 aux nombres qui le composent, ou en en soustrayant 216. Les nombres sont de 225 à 274.

Un second carré à 3 bordures se détermine en ajoutant ou soustrayant 108, lorsqu'on a déjà composé le premier. Ce second carré comprend les nombres de 275 à 324. Les 8 suivans, de 325 à 332, entrent dans le grand châssis.

Le carré à 2 bordures a été construit avec les nombres de 333 à 382, les 18 premiers composant le carré central de 6.

Le 3.e carré à 3 bordures dérive du premier, en ajoutant à ses nombres ou en soustrayant 216; il contient les nombres de 383 à 432; les 8 suivans entrent dans le châssis: ce sont ceux de 433 à 440.

Le 4.e carré à croix aura les nombres de 441 à 490, et il faudra ajouter au premier ou en retrancher 432; les autres nombres restans seront pour le châssis.

On aura donc, pour composer ce châssis,

NOMBRES.			DIFFÉRENCES.		
1	2.....	8	577,5	576,5.....	570,5
109	110.....	116	469,5	468,5.....	462,5
217	218.....	224	361,5	360,5.....	354,5
325	326.....	332	253,5	252,5.....	246,5
433	434.....	440	145,5	144,5.....	138,5
491	492.....	578	87,5	86,5.....	0,5

Un couple vaut 1157; chaque nombre, 578,5. On a formé les lignes comme suit:

1.re verticale...
570,5 + 571,5 + 572,5 + 573,5 + 574,5
+575,5+576,5+577,5+138,5+139,5
+140,5+141,5+142,5+143,5+144,5
+145,5—$\overline{464}$,5—$\overline{465}$,5—466,5—467,5
—468,5—469,5—354,5—355,5—356,5
—357,5—358,5—359,5—360,5—361,5
—$\overline{16}$,5—$\overline{17}$,5—15,5—12,5.

2.e verticale....
$\overline{462}$,5 + $\overline{463}$,5 + 250,5 + 251,5 + $\overline{18}$,5
+19,5+20,5+21,5+8,5+11,5+14,5
+ $\overline{13}$,5 + 60,5 + 61,5 + 62,5 + 63,5
+64,5+65,5—246,5—247,5—248,5
— 249,5—67,5—74,5— 75,5—76,5
— 77,5— 78,5 — 79,5 — 80,5 — 81,5
—82,5—83,5—84,5

1.re horizontale.
$\overline{463}$,5+$\overline{465}$,5+68,5+ 69,5+70,5+71,5
+ 72,5 + 73,5 + 66,5 + 85,5 + 86,5
+87,5— $\overline{462}$,5 —$\overline{464}$,5 — 29,5 — 30,5
— 31,5 — 32,5 — 33,5 — 34,5 — 35,5
— 36,5 — 37,5 — 38,5 — 39,5 — 40,5
—41,5 — 42,5 — 43,5 — 44,5 — 45,5
— 47,5 — 46,5 — 22,5

2.e horizontale..
$\overline{18}$,5+$\overline{16}$,5+252,5 + 54,5 + 55,5+56,5
+ 57,5 + 58,5 + 59,5 + 23,5 + 24,5
+25,5 + 0,5 + 1,5 + 3,5 + 5,5—$\overline{13}$,5
— $\overline{17}$,5—253,5—48,5—49,5—50,5
—51,5 —52,5—53,5 —26,5 — 27,5
—28,5—2,5 —4,5—6,5—7,5—9,5
—10,5.

Ce qui a été détaillé dans cette section, suffit pour ne

laisser à vaincre aucune difficulté lorsqu'on aura à diviser un carré en 9 autres par le moyen de châssis.

DEUXIÈME SECTION.

LES CHASSIS PARTAGENT LE CARRÉ EN PARTIES NON CARRÉES.

Avant de donner la manière de former ce genre de châssis, il est bon de présenter les formules relatives aux nombres triangulaires.

Ayant la progression des nombres naturels, à commencer par l'unité, si l'on ajoute successivement les 2 premiers, les 3 premiers, les n premiers termes, on aura 1, 3, 6, 10, 15, 21, etc. C'est cette dernière série qu'on appelle série des nombres triangulaires, parce qu'on peut disposer les nombres de cette série triangulairement, comme

```
•    • •    • • •    • • • •    • • • • •
      •      • •      • • •      • • • •
              •        • •        • • •
                        •          • •
                                    •
```

Soit T le terme général de cette série : puisque chaque terme est égal à la somme des n premiers de la suite des nombres naturels, ce terme général sera $T = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$.

Maintenant, si S_0, S_1, S_2, représentent les sommes des puissances 0, 1, 2, de la série des nombres naturels, on aura $S_0 = n$; $S_1 = \frac{n^2+n}{2} = T$; $S_2 = \frac{2n^3+3n^2+n}{6}$: donc la somme des termes généraux de la série des nombres triangulaires sera $\frac{S_2}{2} + \frac{S_1}{2} = \frac{2n^3+3n^2+n}{12} + \frac{n^2+n}{4} = \frac{n^3+3n^2+2n}{6}$

$=\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}$, quel que soit n. Ainsi, par exemple, le terme général étant $\frac{n^2+n}{2}$, on aurait pour le 6.e $n=6$, et $T=\frac{42}{2}=21$: ainsi le 6.e terme triangulaire est 21. La somme des 6 premiers nombres triangulaires est $\frac{6.7.8}{1.2.3}=56$: en effet $1+3+6+10+15+21=56$.

Revenant aux châssis,

Au lieu des 9 carrés partiels que l'on obtenait par la première section, il n'y a qu'un seul carré coupé par le châssis en parties telles, que leur réunion constitue ce même carré, indépendamment du carré total. On examinera d'abord les carrés impairs. Dans tous ces carrés le moyen est au centre. On a déjà donné un exemple de ce genre de carrés ci-devant, en examinant la construction de châssis réductibles en bordures.

ARTICLE PREMIER.

CARRÉ DE 5.

Ce carré ne peut avoir qu'une forme. (*Voir figure* 175, *planche* XXII). On a choisi, pour le carré de 3, les nombres 1, 4, 7, 10, et leurs complémens. Le moyen, 13, étant au centre, il est resté les différences

2+11—24	5+8—21	8+5—18	11+2—15
3+10—23	6+7—20	9+4—17	12+1—14

Soit l'horizontale formée avec les différences 11+8—10—7—2: il reste 1, 4, 5. Les différences de ces différences sont 5+4+1=10... 5+4—1=8... 5+1—4=2. Il faut voir si parmi les différences de l'horizontale il s'en trouverait deux dont la différence serait 2, 8, 10, positivement ou négativement. On arrive facilement et directement à

reconnaître si la chose est possible, et comment elle est possible. Il faut faire abstraction des résultats négatifs : car 2, 8, 10, peuvent être positifs ou négatifs. On peut toujours supposer que la différence de différences de l'horizontale est positive. En second lieu, puisque 2, 8, 10, sont pairs, il ne faudra pas chercher de rapport entre les différences paires et les différences impaires de l'horizontale. On voit, sans l'écrire, que 11 ne peut se comparer avec 8, 10, 2, qui sont pairs; et, comme $11+7=18>10$, il faut passer à une autre supposition. 8 ne peut se comparer qu'à 10 et 2; mais $8+10>10$ doit être rejeté; $8+2=10$ est convenable; de même $10-2=8$ peut être retenu : il n'y a que ces deux différences de différences que l'on puisse employer. La verticale sera donc $10-2-5-4+1$, ou bien $8+2-5-4-1$. On a choisi cette dernière verticale. Substituant les nombres aux différences, on aura 5, répondant à la différence 8, à l'intersection de la verticale et de l'horizontale; ensuite 15, répondant à -2 en horizontale; et 11, complément de 15, répondant à $+2$ en verticale et diagonalement; 21, complément de 5, est à l'autre diagonale. Les nombres d'intersection placés, les autres se mettent à volonté dans leurs lignes respectives; les complémens, aux cases opposées, achèvent le carré. Il y aurait deux carrés magiques : celui de 3, en réunissant les parties séparées par la châssis; et le carré de 5.

On voit (*figure* 176, *planche* XXXII) le carré à châssis transformé en carré à bordures : les nombres des diagonales deviennent ceux des angles. On peut aussi, ayant le carré à bordures, revenir au carré à châssis : cela ne présente aucune difficulté.

ARTICLE II.

CARRÉ DE 7.

On insistera un peu sur ce carré, afin de faire saisir avec facilité la manière d'opérer dans les différens cas.

On nommera carré central celui qui serait formé par la réunion des parties séparées par le châssis. Ce sera le carré qui, transformant le châssis en bordures, se trouverait être en effet carré central. Or, le plus petit carré étant celui de 3 de racine, il n'y aura qu'une forme dans ce cas. Si le carré central a 5 de racine, il y aura 3 manières de faire le châssis : ainsi, en tout, 7 peut avoir châssis de 4 manières.

Soit d'abord le carré central de 3 de racine : il faudra que les nombres de ce carré soient distribués comme on le voit (*figure* 177, *planche* XXXI). Le châssis aura alors 2 bandes à chaque branche.

On a supposé le carré central formé par les nombres du milieu de la progression de 1 à 49. On peut avec les différences, qui sont de 5 à 24, former les deux horizontales et les deux verticales, comme suit :

Horizontale première. 24+23+22—21—20—19—9
deuxième. 18+17+15—16—14—13—7
Verticale première. 24—23+18—17+12— 8—6
deuxième. 21—20+16—13+11—10—5

Substituant les nombres aux différences, et plaçant convenablement les complémens, on aura le carré de la figure 177. On voit que les complémens des nombres qui ne font pas partie d'intersection, sont aux cases corres-

pondantes, et que ceux d'intersection ont leurs complémens aux cases symétriques.

On verra (*figure* 178, *planche* XXXI) le même carré avec bordure double; chacune est fausse, mais la double est exacte. Il n'y a que les nombres d'intersection qui soient forcés : ceux qui doivent être entre les lignes du carré central dans le châssis, ou qui le couvrent dans les bordures, soit horizontalement, soit verticalement, peuvent se placer à volonté dans leurs lignes respectives, pourvu qu'on ait soin de faire correspondre les complémens.

Soit maintenant le carré central celui de 5 de racine : il y aura 3 formes pour construire ce carré, et par conséquent le châssis. On a choisi les 25 nombres du milieu pour composer le carré central. Le châssis n'a qu'une bande par branche. Qu'on ait d'abord un seul nombre aux angles, et 3 au milieu (*figure* 179, *planche* XXXI) : on peut avoir l'horizontale et la verticale avec les différences restantes, comme suit :

Horizontale. 24+23+22—19—18—17—15
Verticale... 24—22+21+20—16—14—13

Substituant les nombres, on aura le carré de la figure 179.

On voit (*figure* 180, *planche* XXXI) le même carré avec bordure exacte.

Que l'on ait, maintenant, deux nombres aux angles sur une même ligne horizontale, et un nombre seulement au milieu (*figure* 181, *planche* XXX) : le châssis est le même que celui de la figure 179; mais il y a quelque précaution à prendre dans le cas particulier. On verra (*figure* 182)

ce carré avec bordure exacte. On va revenir dans un moment sur le châssis de la figure 181.

Enfin, soit le carré central composé de 4 nombres à chaque angle : il viendra la forme (*figure* 183, *planche* XXX). Ce carré n'exige point de précaution pour sa formation. Le châssis est encore le même que celui de la figure 179. On verra (*figure* 184) ce même carré avec bordure exacte.

Revenant au carré de la figure 181, on a dit qu'il y avait à observer quelque précaution pour le construire. D'abord, rien ne change relativement au carré central, qui est toujours le même dans les trois cas. Il faut ici faire attention à l'une des diagonales, puisque l'autre en dépend. Or, indépendamment des angles, qui forment un couple, et du moyen 25, il y a encore à remplir 4 cases de telle manière que leur valeur soit deux couples ou 100. Soient supposées les différences pour ces 4 cases 17+14—15—16 à la 1.re diagonale : il faut que la 1.re horizontale du châssis comprenne deux de ces différences, dont une avec changement de signe, et que la verticale comprenne les deux autres, dont l'une aussi avec signe changé, et de plus deux autres différences de l'horizontale, encore avec changement de signe. Soit donc, par exemple, l'horizontale 24 +23+22—18—19—17—15. Que la verticale ait d'abord —16—14 de la diagonale : il reste les trois différences 13, 20, 21. Les trois différences de ces trois dernières, trois à trois, et positivement, sont 13+20+21=54.... 13+21 —20=14.... 13+20—21=12.... 21+20—13=28; mais l'on a déjà —16—14=—30 : on aurait donc 54—30=24.... —54—30=—84.... 28—30=—2....

—28—30=—58...14—30=—16...—14—30=—44... 12—30=—18...—12—30=—42; mais la plus grande somme qu'on puisse avoir avec deux des cinq différences 22+23+24—18—19, en changeant un signe, serait 24+19=43, ou—24—19=—43 : ainsi les nombres ci-dessus doivent se restreindre à ceux qui, en plus ou en moins, sont égaux à 43, ou plus petits. Il ne restera que 54—30=24....28—30=—2....14—30=—16.... 12—30=—18....—12—30=—42. Il faut donc voir si deux des différences 22+23+24—18—19 peuvent donner—24+18+42+16+2. Or 24—22=+2.... 24+18=42.... Choisissant la 1.re combinaison, on aurait pour la verticale—16—14+24—22+(28); et, comme 28 a été formé par 21+20—13, la verticale sera—16—14 +24—22+20+21—13. Cela posé, puisque 40, répondant à—15, doit être en diagonale et en horizontale, il sera à la 2.e case de l'horizontale; et 8, répondant à+17, devant être en diagonale, et 42, correspondant à—17, en horizontale, il suit que 42 sera à la 6.e case de l'horizontale, ce qui fixe son complément 8. Par la même raison 41, répondant à—16, devant être en diagonale et en verticale, sera à la 3.e case de cette verticale; et 11, répondant à+14, étant en diagonale, et 39, répondant à—14, en verticale, ces nombres auront leurs places déterminées; les autres nombres se placent à volonté dans leurs lignes respectives.

On voit combien ce cas diffère des autres quant aux précautions qu'il faut employer. Cela aura lieu toutes les fois que les cases autour des angles ne seront pas des carrés, ou distribuées carrément, c'est-à-dire de manière

que les diagonales de ces parties aux angles n'auront pas autant de cases que les côtés de ces mêmes parties.

Avant d'aller plus loin, il y a des observations générales à établir sur les différentes manières dont une racine r peut avoir châssis à son carré.

D'abord, puisque la plus petite racine d'un carré central est 3, on aura $r-3$ pour le nombre de bandes parallèles d'un châssis, et $\frac{r-3}{2}$ représentera le maximum des bandes de chaque branche : ainsi l'on aura successivement, en faisant $\frac{r-3}{2}=p$, les nombres p, $p-1$, $p-2 \ldots 1$, pour ceux des bandes d'une branche, lorsque la racine r d'un carré est donnée. p représentera le rang du nombre triangulaire de même dénomination; $p-1$, celui du nombre triangulaire précédent, et ainsi de suite jusqu'à l'unité, qui est le premier de ces nombres triangulaires. De plus, la valeur de ces mêmes nombres indique le nombre de formes dont est susceptible un carré central: de sorte que le nombre triangulaire de l'ordre p désigne le nombre de formes pour les branches à une bande; $p-1$, celui des formes pour les branches à 2 bandes; $p-2$, celui des formes à 3 bandes; et en général $p-n$ celui des formes à $n+1$ bandes par branche. Ainsi, pour 15, par exemple, on aura $\frac{r-3}{2}=\frac{15-3}{2}=6=p$. Donc p représente le 6.e nombre triangulaire, qui est 21 : il y aura donc 21 formes pour le carré de 15 de racine avec châssis à une bande par branche. De même, $p-1=5$ représente le 5.e nombre triangulaire qui est 15, et il y aura 15 formes pour le châssis à branches de 2 bandes, etc. Autrement,

Le 1.er nombre triangulaire, qui est l'unité, répond au

cas où la racine du carré central est 3 : cette racine est la plus petite de toutes.

Le 2.e nombre triangulaire correspond au cas où la racine du carré central est 5;

Le 3.e nombre triangulaire, au cas où la racine est 7;

Le 4.e nombre triangulaire, au cas où la racine $=9$;

Le 5.e nombre triangulaire, au cas où la racine $=11$;

Le 6.e nombre triangulaire, enfin, au cas où la racine $=13$.

Et généralement, pour les carrés impairs, si de la racine on soustrait 2, il reste un nombre impair dont le rang, à partir du second, désigne le plus grand des nombres triangulaires qui doit être compris dans la série de ces nombres. Soit r la racine donnée : $r-2$ serait le nombre impair dont il s'agit; or l'ordre d'un nombre impair est égal à la plus petite moitié de ce nombre; et, comme on part du second, on aurait $\frac{r-3}{2}$, comme ci-dessus.

Le dernier nombre triangulaire correspond toujours au nombre impair $=r-2$, quel que soit r, pourvu qu'il soit impair.

Si la racine $r=37$, on aura $r-2=35$; la plus petite moitié est $17=\frac{37-3}{2}$; mais la somme des 17 premiers nombres triangulaires est, d'après ce qui a été dit, $\frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot2\cdot3}$; et, comme ici $n=17$, on aura $\frac{17\cdot18\cdot19}{2\cdot3}=17\cdot19\cdot3$ $=969$: il y aurait donc 969 formes pour toutes celles dont est susceptible le carré de 37 avec châssis coupant un carré en neuf parties non carrées.

De même pour 15, la somme des 6 premiers nombres triangulaires est $\frac{6\cdot7\cdot8}{2\cdot3}=56$: il y a donc 56 formes de châssis pour 15 de racine. On ne fait ici attention qu'à la partie

du carré central en horizontale : car, si l'on y faisait entrer la disposition en verticale, ce serait double emploi, puisqu'il n'y aurait que changement de position du carré total, et que l'on ne considère que les formes, et non les combinaisons, lesquelles tiennent à d'autres calculs.

Voici les formes pour le carré de 15.

Lorsque 3 est la racine du carré central, il n'y a jamais qu'une forme.

Si 5 est la racine du carré central, on peut avoir 1 case à chaque angle, et 3 au milieu de la 1.re horizontale; ou 2 cases aux angles, et une au milieu de cette 1.re horizontale; ou enfin 4 cases aux angles sur les deux 1.res horizontales, et une case sur chacune au milieu : en tout 3 formes, 2.e nombre triangulaire.

Soit 7 la racine du carré central : on peut avoir

Une case à chaque angle, et 5 au milieu de la 1.re horizontale;

2 aux angles de la 1.re horizontale, et 3 au milieu;

3 aux angles, et une au milieu de cette 1.re horizontale;

4 aux angles sur les 2 premières horizontales, et 3 au milieu de chacune;

6 aux mêmes angles, et une au milieu de chacune;

3 aux angles sur les 3 premières horizontales, et une au milieu de chacune: en tout 6 formes, 3.e nombre triangulaire.

La racine du carré central étant 9, on aurait successivement, au milieu de la 1.re horizontale, 7, 5, 3, 1, cases de ce carré, ce qui donne 4 formes;

Puis 4 aux angles sur les 2 premières horizontales, et 5 au milieu de chacune; ensuite 6 aux mêmes angles, ou 3

sur chaque ligne, et 3 au milieu; enfin 8 à ces angles, ou 4 sur chaque ligne, et une au milieu de ces horizontales, ce qui donne 3 formes. On aurait encore 3 cases aux angles sur les 3 horizontales supérieures, et 3 au milieu; ou bien 4 à ces angles sur les mêmes horizontales, et une au milieu : en tout 2 formes. Enfin 4 aux angles sur les 4 horizontales, et une au milieu, ce qui ne donne qu'une forme. Les ajoutant toutes pour le cas particulier, il vient 10, 4.e nombre triangulaire.

Soit la racine du carré central=11. On aura, sur la 1.re horizontale et au milieu successivement, 9, 7, 5, 3, 1;

Sur 2 lignes, 7, 5, 3, 1, au milieu;
Sur 3 lignes au milieu, 5, 3, 1;
Sur 4 lignes au milieu, 3, 1;
Sur 5 lignes au milieu, 1.
Total, 15 formes, 5.e nombre triangulaire.

La racine du carré central est 13, et il viendra

Sur la 1.re horizontale, au milieu, 11, 9, 7, 5, 3, 1, cases pleines;

Sur 2 horizontales, le milieu aurait	9, 7, 5, 3, 1;
Sur 3 horizontales,	7, 5, 3, 1;
Sur 4 horizontales,	5, 3, 1;
Sur 5 horizontales,	3, 1;
Sur 6 horizontales,	1.

Total, 21 formes; 6.e nombre triangulaire. En tout $1+3+6+10+15+21=56$.

On terminera ce qui concerne les carrés impairs à châssis en examinant quelques-unes des formes de 15, et faisant remarquer de nouveau qu'il est inutile de s'occuper des

diagonales, toutes les fois que les cases autour des angles sont carrément disposées, et par conséquent aucune difficulté dans la construction; dans le cas contraire il faut prendre les précautions dont on a donné un exemple au carré de 7, et c'est ce dernier cas dont on va donner de nouveaux exemples. On commence par supposer que le carré central a 3 pour racine, c'est-à-dire qu'il n'y a que les 4 angles, le milieu des 4 lignes extérieures du carré et le centre, occupés par les nombres qui composent le carré central; le moyen occupe le centre.

ARTICLE III.

CARRÉ DE 15.

Lorsque les nombres aux angles sont carrément disposés, il n'est pas nécessaire que le moyen soit au centre du carré total; mais cela est indispensable dans le cas contraire, et aussi lorsque la racine du carré central est 3.

Soit pour le carré de 15 la racine du carré central = 3. Que l'on choisisse pour ce carré les 9 nombres du milieu de la progression de 1 à 225 : les différences seront de 5 à 112, et l'on pourra composer comme suit les horizontales et les verticales (*figure* 185, *planche* XXX).

HORIZONTALES.

112+111+110+109+108+107+106—105—104—103—102—101—100—99—49	1.re
98+ 97+ 96+ 95+ 94+ 93+ 92— 91— 90— 89— 88— 87— 86—84—50	2.e
85+ 83+ 82+ 81+ 80+ 79+ 78— 77— 76— 75— 74— 73— 72—70—51	3.e
71+ 69+ 68+ 67+ 66+ 65+ 64— 63— 62— 61— 60— 59— 58—55—52	4.e
57+ 56+ 54+ 53+ 42+ 41+ 40— 48— 47— 46— 45— 44— 43—38—32	5.e
39+ 37+ 36+ 35+ 27+ 26+ 25— 34— 33— 31— 30— 29— 28—24—16	6.e

VERTICALES.

1	2	3	4	5	6		1 c.	2 c.	3 c.	4 c.	5 c.	6 c.		
112+	98+	85+	71+	57+	39+	23—	111—	97—	83—	69—	56—	37—22—10		1.re
1	2	3	4	5	6		1 c.	2 c.	3 c.	4 c.	5 c.	6 c.		
110+	96+	82+	68+	54+	36+	21—	109—	95—	81—	67—	53—	35—18— 9		2.e
1	2	3	4	5	6		1 c.	2 c.	3 c.	4 c.	5 c.	6 c.		
108+	94+	80+	66+	42+	27+	19—	107—	93—	79—	65—	41—	26—17— 8		3.e
1	2	3	4	5	6		1 c.	2 c.	3 c.	4 c.	5 c.	6 c.		
—105—	91—	77—	63—	45—	30—	20+	104+	90+	76+	62+	44+	29+15+11		4.e
1	2	3	4	5	6		1 c.	2 c.	3 c.	4 c.	5 c.	6 c.		
—103—	89—	75—	61—	43—	28—	13+	102+	88+	74+	60+	38+	24+14+12		5.e
1	2	3	4	5	6	1 c.	2 c.	3 c.	4 c.	5 c.	6 c.			
— 99—	84—	70—	52—	32+	25+	100+	87+	72+	59—	40+	16+	5+ 6+ 7		6.e

Substituant les nombres aux différences, et les plaçant convenablement aux intersections, on aura le carré de la figure 185.

LA RACINE DU CARRÉ CENTRAL EST 5.

S'il n'y a qu'un nombre à la 1.re horizontale, aux extrémités, et 3 au milieu, il n'y a pas lieu de s'occuper des diagonales, et le moyen n'est pas nécessairement au milieu. S'il y a 4 nombres aux angles, savoir : 2 sur chacune des 2 premières horizontales, il en sera comme il vient d'être dit. Il n'y a donc qu'à examiner le cas où le carré central a deux nombres aux extrémités, et un seul au milieu.

On a choisi les 25 nombres du milieu de la progression. Le moyen est au centre du carré nécessairement (*figure* 186, *planche* XXXIII).

Les horizontales sont formées comme les 5 premières ci-devant données, savoir :

112+	111+	110+	109+	108+	107+	106—	105—	104—	103—	102—	101—	100—	99—	49	1.re
98+	97+	96+	95+	94+	93+	92—	91—	90—	89—	88—	87—	86—	84—	50	2.e
85+	83+	82+	81+	80+	79+	78—	77—	76—	75—	74—	73—	72—	70—	51	3.e
71+	69+	68+	67+	66+	65+	64—	63—	62—	61—	60—	59—	58—	55—	52	4.e
57+	56+	54+	53+	42+	41+	40—	48—	47—	46—	45—	44—	43—	38—	32	5.e

Il n'en est pas de même des verticales, attendu qu'on n'aura à prendre sur les horizontales que 5 différences communes avec leurs signes, et 5 avec signes changés : il y aura donc à ajouter 5 différences non communes. -Ces verticales peuvent se composer comme suit :

1	2	3	4	5	1 c.	2 c.	3 c.	4 c.	5 c.						
112+	98+	85+	71+	57—	111—	97—	83—	69—	56+	39+	37—	26—	28—	29	1.re
1	2	3	4	5	1 c.	2 c.	3 c.	4 c.	5 c.						
110+	96+	82+	68+	54—	109—	95—	81—	67—	53+	36+	35—	30—	27—	19	2.e
1	2	3	4	5	1 c.	2 c.	3 c.	4 c.	5 c.						
108+	94+	80+	66+	42—	107—	93—	79—	65—	41+	34+	33—	31—	0—	21	3.e
1	2	3	4	5	1 c.	2 c.	3 c.	4 c.	5 c.						
106+	92—	77—	63—	48+	105+	91—	78—	64—	40+	123+	18—	25—	24—	16	4.e
1	2	3	4	5	1 c.	2 c.	3 c.	4 c.	5 c.						
—103—	89—	75—	61—	47+	102+	88+	74+	60+	44—	22—	15+	13+	14+	17	5.e

Lorsque les intersections auront été remplies, comme les complémens se trouvent dans les cases symétriques, toutes les intersections en diagonale feront couple; mais les angles diagonaux font aussi couple, et le moyen est au centre. Il suit qu'il n'y a plus à placer que 4 nombres en diagonale, et formant entr'eux deux couples. Les nombres qui n'entrent pas en intersection ont leurs complémens aux cases correspondantes. Il faut que les 4 différences d'une des diagonales de la 1.re, par exemple, soient prises, savoir: une dans la 1.re horizontale avec son signe, et une autre avec changement de signe. Il en faut une de la 5.e verticale avec son signe, et une avec changement de signe. Ces différences doivent être choisies parmi celles qui ne sont pas communes aux horizontales et verticales.

1 h. 1 h. c. 5 v. 5 v. c.

Soient ces différences —101+100+14—13: leur somme =0, et par conséquent les nombres qui s'y rapportent, font deux couples. Il suit que 214, répondant à—101, se placera à la 2.e case de la 1.re horizontale; et 213, correspondant à—100, à la 14.e case de la même ligne. Son complément 13, dont la différence est 100, sera opposé à 213, et en diagonale. De même 99, correspondant à 14, sera placé à la case d'intersection de la 1.re diagonale et de la 5.e verticale. Enfin 126, auquel répond la différence —13, sera placé à la case d'intersection de la même diagonale et de la 1.re verticale des complémens. On agira de même dans tous les cas semblables : il n'y aura qu'à substituer les nombres aux différences pour avoir le carré de la figur e 186

LA RACINE DU CARRÉ CENTRAL EST 7.

On a choisi le cas où il se trouve trois nombres aux deux

premières horizontales et aux angles ; il n'y en aura qu'un au milieu de chacune de ces lignes. Le moyen est encore au milieu du carré total. On a choisi les 49 nombres du milieu de la progression pour le carré central, c'est-à-dire les 24 qui précèdent et les 24 qui suivent le moyen ; le carré central a été fait par la méthode expéditive.

Les 4 horizontales sont toujours les mêmes qu'aux cas précédens, savoir :

112+111+110+109+108+107+106—105—104—103—102—101—100—99—49 1.re
98+ 97+ 96+ 95+ 94+ 93+ 92— 91— 90—89— 88— 87— 86—84—50 2.e
85+ 83+ 82+ 81+ 80+ 79+ 78— 77— 76— 75— 74— 73— 72—70—51 3.e
71+ 69+ 68+ 67+ 66+ 65+ 64— 63— 62— 61— 59— 60— 58—55—52 4.e

Les verticales sont les suivantes :

1 2 3 4 1 c. 2 c. 3 c. 4 c.
112+ 98+ 85+ 71—111— 97— 83— 69+ 57+ 56+ 48— 54— 53—31—29 1.re
1 2 3 4 1 c. 2 c. 3 c. 4 c.
110+ 96+ 82+ 68—109— 95— 81— 67+ 45+ 46+ 47— 43— 44—30—25 2.e
1 2 3 4 1 c. 2 c. 3 c. 4 c.
108+ 94+ 80+ 66—107— 93— 79— 65+ 40+ 41+ 42— 36— 33—32—26 3.e
1 2 3 4 1 c. 2 c. 3 c. 4 c.
106+ 92— 77— 63+ 49+ 89— 78— 64— 39— 38— 35— 34+ 37+28+27 4.e

Il faut voir le carré (*figure* 187, *planche* XXXIII).

Les deux cases du carré central, à partir de l'angle de la 1.re diagonale, ont leurs complémens aux deux cases de l'angle opposé en diagonale; tout ce qui est intersection en diagonale, a également ses complémens sur cette diagonale. Le moyen occupe le centre. Il ne faut plus que 4 nombres ou différences, savoir : une de la 1.re horizontale, et une autre de la même ligne avec signe changé; plus 2 autres différences, savoir : l'une de la 4.e verticale avec son signe, et une autre avec signe contraire de la même ligne. Ces différences ne doivent pas faire partie de celles qui sont communes, puisqu'elles ne sont pas des différences d'intersection. Soient ces 4 différences $-102+103-39+38=0$: on aura 215, dont la différence est -102 à la 3.e case de la 1.re horizontale, et 216, dont la différence est -103 à la 13.e case de cette horizontale, afin que le complément 10, répondant à 103, soit en diagonale. De même 152, ayant -39 pour différence, aura sa place à la case d'intersection de la 4.e verticale et de la diagonale. Enfin 151, ayant -38 pour différence, sera à la 4.e verticale, de manière que son complément 75, répondant à la différence 38, soit en diagonale. Les nombres substitués aux différences, et les complémens placés convenablement, achèvent le carré de la figure 187. Les 4 nombres $215+152+75+10$ ont pour somme $452=4 \cdot 113$, ou 2 couples, comme cela doit être.

LA RACINE DU CARRÉ CENTRAL EST 9.

On a toujours pris les nombres du milieu de la progression pour le carré central; le plus grand nombre restant est 72, dont la différence est 41; ce sera la plus petite de toutes. On a choisi le cas où il se trouve 4 nombres en ver-

ticale sur une même ligne, à partir de l'angle : ce n'est qu'un changement de position du carré qui aurait 4 nombres aux angles à la 1.re horizontale, et un seul au milieu. On a laissé les trois premières horizontales comme dans les cas précédens. Elles sont donc :

112+111+110+109+108+107+106—105—104—103—102—101—100—99—49 1.re
98+ 97+ 96+ 95+ 94+ 93+ 92— 91— 90— 89— 88— 87— 86—84—50 2.e
85+ 83+ 82+ 81+ 80+ 79+ 78— 77— 76— 75— 74— 73— 72—70—51 3.e

Les verticales ont été composées comme suit :

1	2	3	1 c.	2 c.	3 c.										
112+	98+	85—	111—	97—	83+	67+	68+	69+	71—	53—	55—	56—	57—	58	1.re
1	2	3	1 c.	2 t.	3 c.										
110+	96+	82—	109—	95—	81+	63+	64+	65+	66—	47—	48—	52—	54—	60	2.e
1	2	3	1 c.	2 c.	3 c.										
106+	92+	78—	107—	93—	79+	41+	59+	61+	62—	42—	43—	44—	45—	46	3.e

Chaque ligne devant avoir 15·113, et n'ayant que le couple des angles et le moyen en diagonale, il faut encore 12·113, et la diagonale n'a aucun nombre commun aux intersections ; elle sera composée de 12 différences non communes, savoir : une de chaque horizontale avec son signe, et une avec changement de signe, et de même en verticale. On peut donc faire cette diagonale comme suit :

$1.^{re}$ diagonale $\overset{1v.}{69}+\overset{2v.}{64}+\overset{3v.}{41}-\overset{1h.}{99}-\overset{2h.}{87}-\overset{3h.}{72}+\overset{3h.c.}{77}+\overset{2h.c.}{91}+\overset{1h.c.}{105}-\overset{3v.c.}{59}-\overset{2v.c.}{63}-\overset{1v.c.}{67}=0$

On sait que les lettres *h* et *v* désignent horizontale et verticale.

Il ne sera pas difficile d'achever le carré, d'après les données précédentes. Voir (*figure* 188, *planche* XXXIII).

LA RACINE DU CARRÉ CENTRAL EST 11.

Ce seront encore les 121 nombres du milieu de la progression qui formeront le carré central. Le plus grand nombre restant est 52, dont la différence est 61. On a formé les lignes comme suit :

$112+111+110+109+108+107+100-106-105-104-103-102-101-69-67$ 1.re hor.

$99+98+97+96+95+94+87-93-92-91-90-89-88-61-62$ 2.e hor.

$\overset{1}{112}+\overset{2}{99}-\overset{1c.}{111}-\overset{2c.}{98}+86+85+84+83+82-63-64-65-71-79-80$ 1.re ver.

$\overset{1}{110}+\overset{2}{97}+\overset{1c.}{102}+\overset{2c.}{89}+72+68+66-81-78-77-76-75-74-73-70$ 2.e ver.

La forme (*figure* 189, *planche* XXXIII) est celle de quatre nombres sur les deux premières horizontales, et trois nombres au milieu des mêmes lignes. On voit qu'il n'entre encore ici aucun des nombres d'intersection, et que la diagonale doit avoir une différence de chacune des horizontales et verticales avec son signe, et une autre avec changement de signe. On pourra donc faire la diagonale comme suit :

1 h.	2 h. c.	1 v.	2 v.	2 v. c.	1 v. c	2 h. c.	1 h. c.
107	—93	—80	—77	+70	+64	—94	+103

Substituant les nombres, et mettant les complémens convenablement, on aura le carré de la figure 189.

On verra (*figure* 191, *planche* XXXIII) le même carré avec bordure double, la première étant fausse isolément, ainsi que la seconde, mais le carré total étant exact avec la double bordure.

LA RACINE DU CARRÉ CENTRAL EST 13.

Le cas choisi (*figure* 190, *planche* XXXIII) est celui de 5 nombres aux angles, sur les 4 premières horizontales, et 3 au milieu de ces lignes. La première diagonale, comme on peut le voir, aura deux différences non communes de l'horizontale, dont une avec signe changé, et de même pour la verticale. Le carré central a été fait par 13 progressions, dont les six dernières contiennent les complémens des six premières; le moyen doit occuper le milieu de la 7.e. Voici ces progressions :

5 · 6.... 17	56 · 57.... 68	107 · 108.... 119	158 · 159.... 170	209 · 210.... 221
22 · 23.... 34	73 · 74.... 85	124 · 125.... 136	175 · 176.... 187	
39 · 40.... 51	90 · 91.... 102	141 · 142.... 153	192 · 193.... 204	

Les différences restantes sont 7, 8, 9, 10, 24, 25, 26, 27, 41, 42, 43, 44, 58, 59, 60, 61, 75, 76, 77, 78, 92, 93, 94, 95, 109, 110, 111, 112.

Avec ces différences on peut faire les lignes comme suit :

112+110+109+92+75+76+77—111—93—94—95—78—59—60—61 horizontale.

h. h. c.
109+111+ 26+27+ 9+10—58— 41—42—43—44—24—25— 7— 8 verticale.

h. c. h. v. c. v.
61— 60+ 42—43=0 diagonale.

On voit par le détail ci-dessus qu'on n'éprouvera pas de difficulté, même dans les seuls cas qui pourraient paraître en offrir.

On va passer aux châssis des carrés pairs.

ARTICLE IV.

CARRÉ DE 6.

Dans tous les carrés pairs il ne peut y avoir moins de deux nombres du carré central au milieu de la première horizontale : car, ce carré central étant nécessairement pair, s'il n'y avait qu'un nombre au milieu de l'horizontale, il s'en trouverait aux extrémités un pair et un impair, ce qui rendrait le châssis irrégulier.

Le plus petit carré pair est celui de 4 : ainsi le plus petit carré susceptible de châssis est 6, et il n'y aura qu'une bande par branche. Il n'y a qu'une forme à ce châssis : premier nombre triangulaire.

Le carré de 8 aura trois formes pour le châssis à branche d'une seule bande, le carré central sera celui de 6. Ces formes seront, savoir : un nombre à chaque angle de la première horizontale, et quatre au milieu; deux nombres sur la première horizontale aux angles et au milieu; deux nombres sur les deux premières horizontales aux angles, et deux au milieu de chacune. On pourrait croire qu'en mettant un nombre à l'angle sur les deux premières horizontales, et quatre au milieu de chacune d'elles, on aurait encore une forme, mais ce serait la seconde en tournant le carré; ce n'est qu'un changement de position, et non de forme. Le carré de 8 aura donc trois formes, ce qui est le 2.e nombre triangulaire.

Le carré de 10, pour branches à une bande, aura 6 formes, savoir :

1 nombre aux angles, et 6 au milieu de la 1.re horizontale;

2 nombres aux angles, et 4 au milieu, même ligne;

3 nombres aux angles, et 2 au milieu, même ligne;

2 aux extrémités des deux 1.res horizontales, et 4 au milieu de chacune;

3 aux extrémités des 2 horizontales, et 2 au milieu;

3 aux extrémités des 3 1.res horizontales, et 2 au milieu :

En tout, 6 formes, 3.e nombre triangulaire.

Le carré de 12 à une bande par branche du châssis, aura 10 formes, savoir :

1 nombre aux angles de la 1.re horizontale, et 8 au milieu;

2 aux angles, et 6 au milieu, même ligne;

3 aux angles, et 4 au milieu, même ligne;

4 aux angles, et 2 au milieu, même ligne;

2 aux angles des 2 1.res horizontales, et 6 au milieu des mêmes lignes;

3 aux mêmes angles, et 4 au milieu, mêmes lignes;

4 aux mêmes angles, et 2 au milieu, mêmes lignes;

3 aux angles des 3 premières horizontales, et 4 au milieu de chacune :

4 aux angles, et 2 au milieu, mêmes lignes;

4 aux angles des 4 1.res horizontales, et 2 au milieu de chacune :

En tout, 10 formes, 4.e nombre triangulaire.

Le carré de 14 pour châssis à une bande, aura 15 formes, 5.e nombre triangulaire.

Le carré de 16 aura 21 formes, 6.e nombre triangulaire.

Le carré de 18 aura 28 formes, 7.e nombre triangulaire, et ainsi de suite.

En général, si r représente la racine paire d'un carré, $\frac{r-4}{2}=p$ exprime le nombre triangulaire dont la valeur donne le nombre de formes que prend le carré, lorsque le châssis n'a qu'une bande par branche; et $p-1$, $p-2\ldots 1$, expriment les nombres triangulaires répondant aux cas où les branches sont de 2, de 3, etc., bandes; l'unité correspond au cas où le carré central est 4, et il ne peut y avoir qu'une forme. On a vu que, n représentant le nombre des termes de la série naturelle commençant par l'unité, ou, ce qui est la même chose, le dernier terme de cette série auquel on s'est arrêté, la somme des nombres triangulaires, depuis l'unité, qui est le premier, jusqu'à celui dont le rang est désigné par n, était $n\,\frac{(n+1)\ (n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}$. On aurait, pour la racine 18, la valeur $\frac{18-4}{2}=p=n=7$: donc la somme des 7 nombres triangulaires, du premier au 7.e, est $\frac{7\cdot 8\cdot 9}{6}=7\cdot 4\cdot 3=84$. Ainsi le carré de 18 avec châssis aurait 84 formes. En effet :

Branches à 7 bandes : on aurait carré central de 4, et par conséquent 1 forme.

Branches à 6 bandes : carré central de 6, qui se forme comme est dit au carré de 8 ci-dessus, de 3 façons : donc 3 formes.

Branches à 5 bandes : carré central de 8, comme au carré de 10 : ainsi 6 formes.

Branches à 4 bandes : carré central de 10, comme au carré de 12, et 10 formes.

Branches à 3 bandes : carré central de 12, comme au carré de 14, et 15 formes.

Branches à 2 bandes : carré central de 14, comme au carré de 16, et 21 formes.

Branches à 1 bande : carré central de 16, comme au carré de 18, et 28 formes. Or $1+3+6+10+15+21+28=84$.

Pour connaître donc sur le champ combien il y a de formes pour un nombre de bandes quelconque, 4, par exemple, puisque $n=p=7$, on aura $p-3=4$: ce sera le 4.e nombre triangulaire, lequel est égal à $\frac{(4+1)4}{2}=5\cdot2=10$, et ainsi des autres.

Revenant au carré de 6 (*figure* 192, *planche* XXXII), le carré central a été construit avec les 16 nombres du milieu de la progression de 1 à 36, et l'on a composé, avec les différences restantes, savoir :

Horizontale. 17,5+16,5+ 9,5—13,5—14,5—15,5

Verticale. 17,5—16,5+12,5+ 8,5—10,5—11,5
(h. au-dessus de 17,5 ; h. c. au-dessus de 16,5)

On voit (*figure* 193, *planche* XXXII) le carré de 6 avec bordure exacte tirée du châssis, ce qui peut toujours se faire lorsque le châssis n'a qu'une bande par branche.

ARTICLE V.

CARRÉ DE 10.

On a choisi (*figure* 194, *planche* XXXII) pour le carré de 10 un carré central de 6 et 2 nombres aux angles sur la 1.re horizontale; les 36 nombres du milieu de la progression de 1 à 100 composent le carré central : il suit que la diagonale aura 4 différences ne faisant pas partie des intersections : car dans le carré central 41 et 60, 42 et 59,

de même 86 et 15, 90 et 11 aux intersections, faisant couple, il faut, pour achever la 1.re diagonale, qu'elle ait 2 différences de la 1.re horizontale, dont une avec signe changé, et 2 de la 2.e verticale, aussi avec un signe changé. On a formé les lignes comme suit :

1.re horizontale. $\begin{cases} 49{,}5 + 48{,}5 + 47{,}5 + 46{,}5 + 21{,}5 - 45{,}5 \\ -44{,}5 - 43{,}5 - 42{,}5 - 37{,}5 \end{cases}$

2.e horizontale. $\begin{cases} 41{,}5 + 40{,}5 + 34{,}5 + 32{,}5 + 31{,}5 - 39{,}5 \\ -38{,}5 - 36{,}5 - 35{,}5 - 30{,}5 \end{cases}$

1.re verticale... $\begin{cases} \overset{1}{49{,}5} - \overset{1\,c.}{48{,}5} - \overset{2}{35{,}5} + \overset{2\,c.}{39{,}5} + 28{,}5 + 19{,}5 \\ +25{,}5 - 27{,}5 - 26{,}5 - 24{,}5 \end{cases}$

2.e verticale... $\begin{cases} \overset{1}{47{,}5} - \overset{1\,c.}{46{,}5} - \overset{2}{36{,}5} + \overset{2\,c.}{38{,}5} + 29{,}5 + 22{,}5 \\ +20{,}5 - 33{,}5 - 23{,}5 - 18{,}5 \end{cases}$

Diagonale.. $-\overset{1\,h.}{44{,}5} + \overset{1\,h.\,c.}{42{,}5} + \overset{2\,v.}{22{,}5} - \overset{2\,v.\,c.}{20{,}5} = 0$

On a dit qu'il était inutile de faire entrer en diagonale les différences, et par conséquent les nombres qui font partie des intersections, attendu qu'à raison de la symétrie des cases où sont les nombres et leurs complémens, ces nombres avec les complémens font un couple en diagonale. Il ne faut donc s'occuper que de la partie des diagonales qui se trouvent entre les lignes du carré central. Ici 95, correspondant à —44,5, est à l'intersection de la diagonale et de la 2.e horizontale ; 8, répondant à 42,5, aura son complément 93 à l'intersection de la 2.e diagonale et de la 1.re horizontale. 28, dont la différence est 22,5, est à l'intersection de la 2.e verticale et de la 1.re diagonale. Enfin 71, ayant pour différence —20,5, sera complément de 30, dont la différence est 20,5, et qui est à l'intersection de

la 2.e diagonale et de la 2.e verticale. Avec ces données il est aisé de terminer le carré.

ARTICLE VI.

CARRÉ DE 12.

On terminera ce qui concerne les carrés pairs à châssis en examinant quelques formes du carré de 12, comme on a fait pour le carré de 15. Or ce carré de 12 peut avoir 4, 3, 2, ou une seule bande à chaque branche du châssis : ici $r=12$ et $\frac{r-4}{2}=4$; c'est le nombre triangulaire qui répond au cas où l'on n'a qu'une bande par branche : d'où il suit que $\frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{6}=20$ représente la somme des formes du carré de 12 avec châssis. On n'examinera, pour chaque carré central, qu'un seul cas, et de préférence celui où les angles n'ont pas de nombres carrément disposés, puisque, dans ces derniers cas, et comme pour les carrés impairs, on n'a pas à s'occuper des diagonales.

LE CARRÉ CENTRAL A 4 DE RACINE.

Il n'y a qu'une forme à ce carré, mais une grande quantité de combinaisons. On a choisi les 8 premiers et les 8 derniers nombres pour le carré central. (*Figure* 195, *planche* XXXIV.)

HORIZONTALES.

63,5+62,5+61,5+60,5+59,5—58,5—57,5—56,5—55,5—54,5—53,5+28,5........ 1.re

52,5+51,5+50,5+49,5+48,5—47,5—46,5—45,5—44,5—43,5—42,5+17,5........ 2.e

41,5+40,5+39,5+38,5+37,5—36,5—35,5—34,5—33,5—32,5—31,5+ 6,5........ 3.e

30,5+29,5+27,5+26,5+19,5+ 4,5—25,5—24,5—23,5—22,5—21,5—20,5........ 4.e

VERTICALES.

1	2	3	4	1 c.	2 c.	3 c.	4 c.					
63,5	+52,5	+41,5	+30,5	—62,5	—51,5	—40,5	—29,5	+14,5	+13,5	—16,5	—15,5	.... 1.re
61,5	+50,5	+39,5	+27,5	—60,5	—49,5	—38,5	—26,5	+11,5	+12,5	—18,5	— 9,5	.... 2.e
—58,5	—47,5	—36,5	—24,5	+57,5	+46,5	+35,5	+23,5	+10,5	+ 5,5	— 8,5	— 3,5	.... 3.e
—56,5	—45,5	—34,5	—22,5	+55,5	+44,5	+33,5	+21,5	+ 7,5	+ 0,5	— 1,5	— 2,5	.... 4.e

Le carré résultant est celui de la figure 195.

LE CARRÉ CENTRAL A 6 POUR RACINE.

Ce carré aurait 3 formes. On s'occupe de celle où il faut prendre en considération la diagonale : c'est le cas où l'on a 2 cases aux angles sur la 1.re horizontale du carré. On a choisi les 18 premiers et 18 derniers nombres pour le carré central.

Les tableaux qui ont servi à construire le carré central sont

1	2	4	3	5	6	0	30	30	0	30	0	1	32	34	3	35	6
6	2	3	4	5	1	18	18	12	12	18	12	24	20	15	16	23	13
6	5	3	4	2	1	24	6	6	6	24	24	30	11	9	10	26	25
1	5	3	4	2	6	6	24	24	24	6	6	7	29	27	28	8	12
6	2	4	3	5	1	12	12	18	18	12	18	18	14	22	21	17	19
1	5	4	3	2	6	30	0	0	30	0	30	31	5	4	33	2	36

Comme le plus petit des 18 grands est 127=145—18, puisque le couple=145, il faudra substituer 127 au lieu de 19; or 127—19=108. Donc on ajoutera 108 à tous les nombres qui surpassent 18, ce qui donne le carré central.

1	140	142	3	143	6
132	128	15	16	131	13
138	11	9	10	134	133
7	137	135	136	8	12
18	14	130	129	17	127
139	5	4	141	2	144

Il n'était pas nécessaire de faire d'abord le carré avec la série des premiers nombres : on pouvait choisir sur le champ, pour les multiples du 2.e tableau, les nombres 0, 6, 12, 126, 132, 138.

On voit que la diagonale doit avoir, non compris les cases d'intersection, deux différences de la 1.re horizontale, dont une avec changement de signe, et autant de la 3.e verticale. Ces lignes ont été formées comme suit (*figure* 196, *planche* XXXIV) :

HORIZONTALES.

53,5+52,5+51,5+50,5+49,5+18,5—48,5—47,5—46,5—45,5—44,5—43,5...... 1.re
42,5+41,5+40,5+39,5+38,5+ 7,5—37,5—36,5—35,5—34,5—33,5—32,5...... 2.e
31,5+30,5+29,1+28,5+21,5+ 8,5—27,5—26,5—25,5—24,5—23,5—22,5...... 3.e

VERTICALES.

$$\overset{1}{53{,}5}+\overset{2}{42{,}5}+\overset{3}{31{,}5}-\overset{1\,c.}{52{,}5}-\overset{2\,c.}{41{,}5}-\overset{3\,c.}{30{,}5}+20{,}5+19{,}5+\ 6{,}5-15{,}5-16{,}5-17{,}5\ldots\ldots\ 1.^{re}$$
$$\overset{1}{51{,}5}+\overset{2}{40{,}5}+\overset{3}{29{,}5}-\overset{1\,c.}{50{,}5}-\overset{2\,c.}{39{,}5}-\overset{3\,c.}{28{,}5}+14{,}5+13{,}5+\ 3{,}5-10{,}5-11{,}5-12{,}5\ldots\ldots\ 2.^{e}$$
$$-\overset{1}{48{,}5}-\overset{2}{37{,}5}-\overset{3}{27{,}5}+\overset{1\,c.}{47{,}5}+\overset{2\,c.}{36{,}5}+\overset{3\,c.}{25{,}5}+\ 9{,}5+\ 1{,}5+\ 0{,}5+\ 2{,}5-\ 5{,}5-\ 4{,}5\ldots\ldots\ 3.^{e}$$

Diagonale. — $\overset{1\,h.}{43{,}5}+\overset{1\,h.\,c.}{44{,}5}-\overset{3\,v.}{5{,}5}+\overset{3\,v.\,c.}{4{,}5}$

LA RACINE DU CARRÉ CENTRAL EST 8.

Le carré aura 6 formes : on choisit celle où l'on a 3 cases aux angles sur les deux premières horizontales. Le carré central a été fait avec les 32 premiers et 32 derniers nombres, par la méthode expéditive des carrés pairs divisibles par 4. La diagonale aura deux différences parmi celles non communes dans la 1.re horizontale, et dont l'une aura son signe changé, et de même pour la 2.e verticale. Voici ces lignes. Le carré se trouve (*figure* 197, *planche* XXXIV).

1.re horizon. 39,5+38,5+37,5+36,5+29,5+16,5—35,5—34,5—33,5—32,5—31,5—30,5

2.e horizon. 28,5+27,5+26,5+25,5+11,5+12,5—24,5—23,5—22,5—21,5—20,5—19,5

1.re vertic. . $\overset{1}{39{,}5}+\overset{2}{28{,}5}-\overset{1\,c.}{38{,}5}-\overset{2\,c.}{27{,}5}$+18,5+17,5+ 8,5+ 6,5— 9,5—13,5—14,5—15,5

2.e vertic. . $\overset{1}{37{,}5}+\overset{2}{26{,}5}-\overset{1\,c.}{36{,}5}-\overset{2\,c.}{25{,}5}$+ 0,5+ 2,5+ 3,5+10,5— 1,5— 4,5— 5,5— 7,5

Diagonale. $-\overset{1\,h.}{38{,}5}+\overset{1\,h.\,c.}{34{,}5}-\overset{2\,v.}{5{,}5}+\overset{2\,v.\,c.}{4{,}5}$.

LA RACINE DU CARRÉ CENTRAL EST 10.

Ce carré a 10 formes. On a choisi celle où la première horizontale a 4 cases aux angles du carré central. Ce carré a été fait avec les 50 premiers et les 50 derniers nombres, d'après l'une des méthodes données pour les carrés pairs divisibles par 2. Voici le carré pour les 100 premiers nombres, et qui a servi pour celui du carré central.

1	99	3	97	95	6	94	8	92	10
90	12	88	14	86	85	17	83	19	11
21	79	23	77	25	26	74	28	72	80
70	32	68	34	66	65	37	63	39	31
51	59	43	47	45	46	54	48	52	60
50	42	58	57	55	56	44	53	49	41
40	62	38	64	36	35	67	33	69	61
71	29	73	24	76	75	27	78	22	30
20	82	18	84	16	15	87	13	89	81
91	9	93	7	5	96	4	98	2	100

Ajoutant 44 à tous les nombres qui surpassent 50, on aura le carré central. Voir (*figure* 198, *pl.* XXXIV): car au lieu de 51 il faut mettre 95, qui est le premier des 50 derniers nombres. Or $95-51=44$.

L'inspection de la figure fait voir que la diagonale comprend 8 cases du carré central, dont les angles opposés font un couple, ainsi que les deux 45 et 100 du milieu: restent donc les 4 cases $132+121+27+13=293$, ou deux couples plus 3. Il faut donc, dans les 4 cases restantes, et ne faisant pas partie du carré central, avoir 3 unités de moins que 4 couples, ou, ce qui est la même chose, il faudra 3 unités de plus dans les 4 différences,

qui seront prises, savoir : 2 dans l'horizontale, dont une avec signe changé, et 2 en verticale, aussi avec un changement de signe. En effet, plus une différence est grande positivement, plus le nombre correspondant est petit ; et, au contraire, plus une différence est grande négativement, plus le nombre correspondant est grand. D'après ces réflexions l'on a formé comme suit les lignes du carré :

Horizontale. $\begin{cases} 21{,}5+20{,}5+19{,}5+18{,}5+6{,}5+3{,}5-17{,}5 \\ -16{,}5-15{,}5-14{,}5-13{,}5-12{,}5 \end{cases}$

Verticale.. $\begin{cases} \overset{h.}{21{,}5}-\overset{h.\,c.}{20{,}5}+11{,}5+10{,}5+4{,}5+2{,}5+1{,}5 \\ -9{,}5-8{,}5-7{,}5-5{,}5-0{,}5 \end{cases}$

Diagonale. $-\overset{h.}{16{,}5}+\overset{h.\,c.}{17{,}5}+\overset{v.}{1{,}5}+\overset{v.\,c.}{0{,}5}=19{,}5-16{,}5=3.$

On voit que les différences de la diagonale, au lieu de donner 0 pour somme, ont 3 en plus : donc les nombres correspondans auront 3 en moins. On mettra 89, correspondant à $-16{,}5$, à l'intersection de l'horizontale et de la diagonale. De même 55, répondant à $+17{,}5$, sera opposé à 90, dont la différence est $-17{,}5$. Par la même raison 71, dont la différence est $+1{,}5$ sera à l'intersection de la diagonale et de la verticale. Enfin 72, ayant 0,5 pour différence, sera opposé à 73, dont la différence est $-0{,}5$: en effet les 4 nombres $89+71+72+55=287$ ont pour somme un nombre plus petit de 3 unités que 2 couples, valant 290. La 2.e diagonale avait au contraire 3 unités de moins que 2 couples, pour les 4 cases faisant partie du carré central ; mais $90+74+73+56$, complémens des nombres ci-dessus de la 1.re diagonale, valent 293, plus grand de 3 unités que deux couples. L'une

des diagonales rectifiée, l'autre l'est nécessairement, à raison de la symétrie.

Cet exemple est très-remarquable, et servira pour tous les cas semblables : il s'en présentera un grand nombre par la suite.

On verra (*figure* 199, *planche* XXXIV) le carré central de la figure 196 réuni. On a trois fausses bordures qui n'en font qu'une triple : car il n'y a pas de carré magique si l'on ajoute seulement la première ou les deux premières au carré central. On ne peut pas même les rectifier, comme cela arrive aux fausses bordures ordinaires, ainsi qu'on l'a vu ailleurs. Ici les diagonales d'intersection sont aux angles, le reste des intersections est hors des lignes du carré central et autour des angles. Quant aux nombres qui, dans la figure 196, sont entre les parties du carré central, ils couvrent, dans la figure 199, ce même carré. On ne peut se tromper sur leur placement une fois que la diagonale est fixée : car chacun de ses nombres détermine la ligne entière horizontale ou verticale. L'inspection des deux figures indique mieux que les règles que l'on pourrait donner, le placement de ces lignes.

Il n'est pas indispensable que les nombres qui couvrent le carré de la figure 199 soient dans l'ordre où on les voit : il suffit qu'ils conservent leurs lignes, et que l'on fasse coïncider convenablement leurs complémens. Les carrés d'intersection aux angles, carrés d'ailleurs non magiques, ne sont pas nécessairement arrangés comme on le voit figure 199. On peut mettre à l'angle de la 1.re diagonale aussi bien 32 et 19 que 100; mais cela fait, la détermination de tout le reste s'ensuit.

On trouvera le carré de la figure 199 autrement distribué (*planche 28 bis, figure t.*) On ne change rien au carré central. Les lignes de bordure sont les mêmes, mais les nombres n'y sont pas placés de la même manière.

Lorsque les lignes sont déterminées, il suffit des 3 nombres de diagonale 33, 20, 98 pour placer tout le reste. En effet 22 doit se trouver sur la ligne de 20 et sur celle de 33. Il sera donc nécessairement où on l'a placé. 120 se trouve forcé sur la ligne de 20 et 22; 109 sur celle de 98 et 120. La place de 31 est forcée, ainsi que celle de 42, d'après les précédens nombres. Les cases symétriques autour de l'angle opposé reçoivent les complémens; 100, sur l'autre diagonale, devant être sur la ligne de 44, 42, 98, a sa place forcée; il en est de même de 19 et 32; 21 devant se trouver sur la ligne de 32 et sur celle de 19, ne peut avoir qu'une place; le reste s'ensuit pour les intersections. Les nombres de la 1.re horizontale au dessus du carré central n'ont point de places forcées : il suffit qu'ils gardent leur ligne; il en est de même de ceux de la 2.e et de la 3.e horizontale; il n'est pas même nécessaire qu'ils se répondent l'un sous l'autre, comme on l'a fait : ceux d'une ligne se placent où l'on veut dans les 6 cases de leurs lignes; les complémens par ordre et dans les cases opposées régularisent ces dérangemens. Il en est de même des verticales. On le répète, les lignes sont forcées, mais non les nombres qui les composent.

On termine ici ce que l'on avait à dire sur ce genre de châssis. On passe à une autre forme.

TROISIÈME SECTION.

CHASSIS A TRAVERSES.

Un châssis peut avoir plus de deux branches. Celles qui coupent le vrai châssis sont des traverses, et cela donne lieu à de nouvelles combinaisons.

Première Division.

LES PARTIES SÉPARÉES PAR LES BRANCHES SONT DES CARRÉS.

Le plus petit nombre de branches d'un carré à traverses est 3; il s'agit des branches parallèles : il y aura donc 4 carrés séparés par ces branches, et par conséquent 16 carrés en tout. Le plus petit carré étant celui de 3, il s'ensuit que le plus petit carré à traverses est 15, chaque branche n'ayant qu'une bande.

ARTICLE PREMIER.

CARRÉ DE 15.

Soit le carré de 15 (*figure* 200, *planche* XXXV) à construire avec châssis à traverses. Qu'on prenne les 72 premiers et les 72 derniers nombres pour les carrés partiels; que chacun soit construit par la méthode expéditive du carré de 3, et les 16 carrés, considérés comme 16 nombres, par la méthode expéditive du carré de 4, comme on le voit dans la figure. La progression est interrompue : car on a 8 carrés formés avec les petits, et 8 carrés construits avec les grands nombres.

Venant au châssis, il faut connaître les différences. Le moyen est 113; le plus petit nombre restant est 73; la dif-

férence est 113—73=40; le complément est 226—73 =153=113+40.

Comme il y a 9 intersections, on peut faire un autre carré de ces intersections : le moyen étant au centre, on a choisi les nombres 73, 83, 93, 103, plus le moyen, et les complémens de ces nombres, 123, 133, 143, 153. Les différences de ces nombres sont omises dans le tableau suivant :

74+39—152	87+26—139	100+13—126
75+38—151	88+25—138	101+12—125
76+37—150	89+24—137	102+11—124
77+36—149	90+23—136	104+ 9—122
78+35—148	(27) 91+22—135	105+ 8—121
79+34—147	92+21—134	106+ 7—120
80+33—146	(28) 94+19—132	107+ 6—119
81+32—145	(29) 95+18—131	108+ 5—118
(17) 82+31—144	(31) 96+17—130	109+ 4—117
(18) 84+29—142	97+16—129	110+ 3—116
(19) 85+28—141	98+15—128	111+ 2—115
(22) 86+27—140	99+14—127	112+ 1—114

Il faut grouper ces différences par 3, de manière que la somme de 12 d'entr'elles soit égale à la somme des 24 autres, ce qui fera 12 groupes. Or la somme des 12 plus grandes différences est 399; celle des 24 plus petites est 321 : différence des sommes, 78, dont la moitié=39; on peut faire passer 17, 18, 19, 22=76 des petites différences parmi les grandes, et 27, 28, 29, 31=115 des grandes parmi les petites : car on a 115—76=39; ainsi la somme des 12 plus grandes sera diminuée de 39, et celle des petites augmentée de 39. Les groupes pourront être

22—21— 1=0... 19—16— 3=0... 18—14— 4=0...
17—15— 2=0... 32—24— 8=0... 33—26— 7=0...
34—29— 5=0... 35—23—12=0... 36—27— 9=0...
37—31— 6=0... 38—25—13=0... 39—28—11=0

Il y aurait sans doute d'autres combinaisons des différences ci-dessus : car, s'il n'y avait que celle qu'on vient de donner, il ne serait guère possible d'y arriver sans de longs et fatigans tâtonnemens. On peut, par exemple, avoir les groupes :

39=24+14.... 38=29+ 9.... 37=24+13....
36=31+ 5.... 35=23+12.... 34=26+ 8....
33=27+ 6.... 32=28+ 4.... 22=21+ 1....
17=15+ 2.... 18= 7+11.... 19=16+ 3

Il n'est pas plus nécessaire de faire passer 4 différences d'une série dans l'autre : on pourrait se contenter de 2 ou 3. Par exemple, mettant parmi les petites les 2 grandes 27+28=55, et parmi les grandes les deux petites 7+9 =16, on aurait 55—16=39, et l'on pourrait faire les groupes

9= 5+ 4.... 7= 6+ 1.... 39=26+13....
38=23+15.... 37=25+12.... 36=17+19....
35=21+14.... 34=18+16.... 33=22+11....
32=24+ 8.... 31=28+ 3.... 29=27+ 2

Si l'on substituait 32, 33, 34, parmi les petites, et dont la somme est 99, et si l'on mettait parmi les grandes 18, 19, 23=60, on aurait 99—60=39, et l'on pourrait faire les groupes

39=34+ 5.... 38=32+ 6.... 37=33+ 4....
36=25+11.... 35=26+ 9.... 31=24+ 7....
29=21+ 8.... 28=16+12.... 27=14+13....
23=22+ 1.... 19=17+ 2.... 18=15+ 3

Il faut faire attention de ne pas faire des suppositions impossibles à réaliser. Par exemple, si l'on faisait passer 37+38=75 parmi les petites différences, et 19+17=36, on aurait bien 75—36=39; mais il est clair que la supposition est absurde : car, puisqu'il n'y a que 39 qui soit plus grand que 37 et 38, il ne peut pas y avoir parmi les grandes différences une d'entr'elles qui puisse être égale à 37 ou 38 joint à un petit nombre, lorsqu'on aura fait 39=37+2 ou=38+1; mais avec un peu d'attention on évite aisément ces suppositions erronées.

Revenant aux premiers groupes, on placera 6 d'entr'eux, ou plutôt les nombres qui y répondent, et à fantaisie, en horizontale, chacun deux dans les trois cases entre les carrés partiels, pourvu que les trois nombres d'un groupe soient sur la même ligne. L'ordre est d'ailleurs indifférent. Cela ne donnera que la moitié des horizontales; l'autre moitié sera fournie par les complémens de ces groupes, lesquels seront dans les 6 horizontales restantes et à volonté, de manière cependant que tous les complémens des six nombres verticalement placés soient sur la même ligne verticale. On agira de même pour les six autres groupes, qui seront placés en verticale, toujours dans les trois cases entre les carrés partiels. Leurs complémens seront sur la même ligne horizontale. Ainsi, par exemple, ayant mis le 1.er groupe 91, 134, 114, qui répond aux différences +22—21—1 à la 1.re horizontale, on trouve à la 13.e ligne

horizontale du carré le groupe complémentaire 135, 92, 112, dans les mêmes verticales que les nombres 91, 134, 114. Le 2.e groupe 94, 129, 116, répondant aux différences +19—16—3, a son groupe complémentaire à la 10.e horizontale du carré. Ce groupe est 132, 97, 110. Il résulte de ces placemens arbitraires de 6 groupes dans les 12 horizontales et autant dans les 12 verticales, comme aussi des nombres de ces groupes dans chaque ligne, une foule de combinaisons.

Pour se faire une idée de ces combinaisons, sans rien changer aux carrés partiels, conservant les groupes tels qu'ils sont formés ci-dessus, et ne considérant que l'ordre de leur placement, et celui des nombres qui composent chacun d'eux; on aurait d'abord, pour les six groupes en horizontale, à choisir sur 12, ce qui revient à combiner 12 lettres 6 à 6, avec produits différens, le nombre $\frac{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}=924$. Il n'y a plus à s'occuper des 6 groupes en verticale, puisqu'ils sont forcés d'après le choix des 6 groupes des horizontales. Maintenant, puisque 6 groupes et leurs groupes complémentaires peuvent se mettre à volonté sur les 12 lignes horizontales destinées à les recevoir, on aura pour ce plaçement 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, et autant en verticale, ce qui fera $(479001600)^2$. Mais chaque groupe donne 6 combinaisons : donc les 12 groupes en fourniront $6^{12}=2176782336$. Il n'y a pas lieu de s'occuper des complémens qui dépendent des groupes, pour l'ordre des nombres. On aura donc le produit énorme $(479001600)^2\cdot2176782336\cdot924$. Mais quelque prodigieux que soit ce nombre, il est loin de donner toutes les combinaisons du carré de 15 avec une traverse au châssis. Il y

aurait bien d'autres facteurs, et sans sortir du choix des carrés partiels, du carré d'intersection et des groupes. Comme dans le carré de la figure 200, il faut remarquer que chaque carré partiel de 3 a 8 positions, ce qui donnerait 8^{16} ou $(2031616)^2$. Le carré de 4 peut se faire d'un grand nombre de manières, comme on l'a fait voir, nouveau facteur. Le carré d'intersection a aussi 8 positions. On voit qu'en conservant les mêmes élémens, on aurait un nombre de combinaisons qui serait plus grand que l'unité suivie de 45 zéros. Mais ce carré d'intersection peut être fait avec d'autres nombres, les carrés partiels restant les mêmes: ces derniers carrés peuvent avoir d'autres séries; les groupes peuvent considérablement varier, etc., etc.

On va passer à d'autres exemples, en faisant observer que ce genre de carré est un des plus faciles à construire à raison de la symétrie.

ARTICLE II.

CARRÉ DE 16.

Il est d'abord évident que la traverse sera de 2 bandes: car, puisque la racine est paire, si la traverse était d'un nombre de bandes impair, le châssis et la traverse ensemble auraient un nombre impair de cases sur la même horizontale; il faudrait donc qu'il restât un nombre impair de cases pour les 4 carrés, ce qui ne se peut, puisque 4 multiplié par un nombre quelconque donne un produit pair.

On a choisi (*figure* 201, *planche* XXXV) les 144 nombres du milieu pour les carrés partiels, ce qu'on ne pouvait faire pour les carrés impairs, qui ont un terme moyen; on a pris ensuite les 8 premiers et les 8 derniers nombres pour

le carré d'intersection. Il n'y a point de groupes à former comme pour les carrés impairs : il suffit de prendre 4 séries différentes, dont la somme soit=0; chacune d'elles est composée de 12 différences, à raison des 4 intersections par bande. Un couple vaut 257; sa moitié est 128,5; le plus petit nombre restant est 9. Ainsi la plus grande différence est 119,5, et la plus petite est celle de 56, qui est le plus grand nombre restant : elle est donc 72,5. Il suffit de connaître cette première et cette dernière différence pour se dispenser d'en faire le tableau; on pourra former les horizontales et verticales comme suit :

1.re VERTICALE.

119,5 + 117,5 + 115,5 + 112,5 + 110,5 + 108,5 — 118,5 —116,5—114,5—113,5—111,5—109,5

2.e VERTICALE.

107,5+105,5+103,5+100,5+98,5+96,5—106,5—104,5 —102,5—101,5—99,5—97,5

1.re HORIZONTALE.

95,5+93,5+91,5+88,5+86,5+84,5—94,5—92,5—90,5 —89,5—87,5—85,5

2.e HORIZONTALE.

82,5+80,5+78,5+77,5+75,5+73,5—83,5—81,5—79,5 —76,5—74,5—72,5.

Substituant les nombres aux différences, on aura le carré de la figure 201.

On ne donnera que cet exemple de carré pair : il est si facile de les construire, qu'il serait superflu d'insister davantage. On voit qu'il faut mettre 2 des séries ci-dessus en

horizontale, et 2 en verticale ; il importe peu quelle série on choisira pour ces lignes, et dans laquelle des lignes on mettra ces séries. Les séries complémentaires se mettent dans les 2 autres horizontales ou verticales, de manière que les complémens coïncident sur une ligne de même nature avec leurs nombres : ainsi les complémens d'une horizontale seront sur une horizontale, et distribués sur la même verticale ; au contraire les complémens d'une série verticale seront sur une autre verticale, et distribués sur une même horizontale entre les carrés : de sorte qu'il y ait toujours sur une ligne 4 nombres, dont 2 complémens des deux autres.

ARTICLE III.

CARRÉ DE 19.

On pourrait construire ce carré en prenant 16 carrés de 4 et 3 branches à une bande : alors, composant ces 16 carrés avec les 128 premiers et les 128 derniers nombres, on formerait le carré d'intersection avec les nombres répondant aux différences 0, 13, 26, 39, 52. Le couple vaut 362 ; le moyen, 181 ; 181—129=52, qui est la différence du plus grand nombre restant. Cette différence fait partie du carré d'intersection : ainsi la plus grande restante est 51 ; les 16 plus grandes différences sont 51, 50, 49, 48, 47, $\overset{24}{46}$, 45, 44, $\overset{25}{43}$, $\overset{27}{42}$, $\overset{28}{41}$, 40, 38, 37, 36, 35, dont la somme est 692 ; les 32 petites sont 34, 33, 32, 31, 30, 29, $\overset{43}{28}$, $\overset{46}{27}$, $\overset{41}{25}$, $\overset{42}{24}$, 23, 22, 21, 20, 19, 18, 17, 16, 15, 14, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 : leur somme est 556 ; mais 692—556=136,

dont la moitié 68 est ce qu'il faut retrancher des grandes différences et ajouter aux petites. On peut faire passer des grandes aux petites les différences 41, 42, 43, 46=172, et des petites aux grandes les 4 différences 24, 25, 27, 28 =104 : car 172—104=68. On formera les 16 groupes

24=10+14... 25=22+ 3... 27=23+ 4... 28=16+12...
35=33+ 2... 36=30+ 6... 37=18+19... 38=21+17...
40=32+ 8... 44=29+15... 45=34+11... 47=46+ 1...
48=43+ 5... 49=42+ 7... 50=41+ 9... 51=31+20

On mettrait 8 groupes en horizontale, et autant en verticale; les complémens achèveraient le carré, après substitution des nombres aux différences.

Ce n'est pas ce carré, facile à construire d'après ce qui précède, que l'on donne ici, mais celui à double traverse, et comprenant 25 carrés de 3 (*figure* 202, *planche* XXXV), quoique le moyen ne soit pas en intersection; il est au centre de l'un des carrés, et ce carré pourrait ne pas être au centre de la figure : il ne s'y trouve qu'à raison de la formation du carré de 25 par la méthode expéditive, chaque carré étant considéré comme un seul nombre, et les 25 carrés pouvant s'arranger d'une foule de manières, comme on l'a fait voir ailleurs. On a conservé les 68 premiers et les 68 derniers nombres pour le châssis, qu'on peut considérer comme double. On peut, après avoir construit les 25 carrés partiels, faire un carré de 4 distribué aux intersections par la méthode expéditive, si l'on juge convenable; on prendra 8 nombres et leurs complémens pour ce carré. Qu'on choisisse les 8 nombres qui précèdent et qui suivent les 225 des carrés partiels : il restera 60 nombres et leurs complémens; ces nombres seront

les 60 premiers et les 60 derniers ; on ferait 4 séries de différences, chacune de 15, comme par exemple celles qui suivent. On en mettra deux en horizontale, celles qu'on voudra, où l'on voudra, et dans l'ordre qu'on voudra. Les deux autres horizontales contiendront les complémens par ordre ; on agira de même en verticale.

180+179+178+177+176+175+174—173—172—171—170—136—138—139—140
169+168+167+166+165+164+163—162—161—160—159—127—130—131—132
158+157+156+155+154+153+152—151—142—141—137—134—129—126—125
150+149+148+147+146+145+144—143—135—133—128—124—123—122—121

Mais ce n'est pas encore cette construction qui a été suivie pour former la figure 102. On a bien disposé les carrés partiels comme il a été dit ci-dessus, mais on a composé différemment le reste : on a distingué le châssis extérieur de l'intérieur. Le premier a été formé par les différences suivantes :

$$\left.\begin{array}{l}167+166+165+164+163+\overline{162}+174+143+142-\overline{161}-160-159-158-157\\ \quad -156-125-126-127-117\ldots\ldots\end{array}\right\}\text{horizontale.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\overset{\text{h.}}{162}+\overset{\text{h. c.}}{161}+168+169+175+176+177+178+179-170-171-172-173-180\\ \quad -138-139-140-141-121\ldots\ldots\end{array}\right\}\text{verticale.}$$

On construira à l'ordinaire ce châssis extérieur. On voit que 19, répondant à 162, est commun à l'horizontale et à la verticale ; et que 342, correspondant à — 161, est à l'intersection de la 1.re horizontale et de la 2.e verticale. Par conséquent 20, dont la différence est +161, est à l'intersection de la 2.e horizontale et de la 1.re verticale. Ensuite, et sans s'occuper du châssis intérieur, on met les complémens de tous les nombres des horizontale et verticale dans les lignes correspondantes : ainsi 6 et son complément 356 sont sur la même ligne ; il en est de même de 354 et 8, de 39 et 323, 339 et 23, comme s'il n'y avait point de châssis intérieur. On aura aussi 343, complément de 19, en diagonale. D'après ce il est clair qu'il faut que les nombres en diagonale autour du carré central soient complémens l'un de l'autre : car ces diagonales sont complètes par couple, et par le moyen, à ces deux nombres près, aux angles opposés du carré central. Cela entendu, soit la première horizontale du châssis intérieur, par les différences,

175+148+149+150+151+152+153+154+155—175
—144—145—146—147—118—119—120—136—137

On a pris 175, différence de 6, en plus et en moins, puisque 6 et son complément 356 sont sur une même ligne, et font partie des verticales du châssis extérieur.

Maintenant, pour former la 2.e horizontale du châssis intérieur, on mettra d'abord les complémens des nombres qui sont entre les carrés partiels. On a de plus deux différences — 173 et + 173, ou les nombres 354 et 8, qui font un couple : il ne restera que deux différences

à l'intersection de la 1.re horizontale et de la 1.re verticale, et de la 1.re horizontale et 2.e verticale. Ces différences sont aux angles du carré central, et sur la 1.re horizontale; on met leurs complémens en diagonale, et la 2.e horizontale est formée. Elle n'a, comme la 1.re, que 17 différences, puisqu'il y en aura une avec double signe; on en choisira deux à volonté de la 1.re horizontale: leurs complémens en diagonale autour du carré central, et les autres complémens, achèvent la formation de cette 2.e horizontale. Quant aux deux verticales, il suffit d'en connaître une pour construire l'autre, ainsi qu'on vient de le faire pour les horizontales. Cette verticale peut être

$$142+130+132+113+114+115+116+122+123+124$$
$$-142-\overset{h.}{147}-\overset{h.c.}{152}-131-133-134-135-128-129$$

Ici 39, répondant à 142, ayant son complément 323 sur une même ligne, leur différence sera prise avec double signe. De plus —147 et —152 font partie de la 1.re horizontale; la différence —152 changeant ici de signe, le reste s'achève par complément, châssis par châssis, horizontale par horizontale, verticale par verticale. Ces complémens, sauf ceux des diagonales, se placent aux cases opposées; ceux des diagonales, aux cases symétriques.

D'après ce qui a été dit au commencement de l'article, il est aisé de voir que la construction précédente est celle qui exige le plus d'attention, et c'est ce qui a engagé à en donner les détails.

ARTICLE IV.

CARRÉ DE 21.

On ne peut avoir de carrés partiels de 5 : car il en faudrait au moins 4, et il ne resterait qu'une bande. Si les carrés partiels sont de 4 de racine, on ne peut en avoir 5 par la même raison : ainsi on en aurait 4, et par conséquent 3 branches. Il reste 5 bandes, et l'on pourrait avoir 2 bandes à chaque branche du châssis, et une à la traverse, ou une aux branches du châssis, et 3 à la traverse.

On n'examine pas ces cas : il est très-facile de construire le carré dans les deux hypothèses, d'après ce qui précède. Si les carrés partiels sont ceux de 3, il peut y en avoir 16, et par conséquent 3 branches. Il reste 9 bandes : on peut donc en mettre 7 à la traverse, et une à chaque branche du châssis, ou 2 aux bandes, et 5 à la traverse, ou 3 aux branches, et 3 à la traverse, ou enfin 4 aux branches, et 1 à la traverse. Il y aurait pour chaque cas différente construction. On peut aussi avoir 5 carrés de 3 : alors il restera 4 branches et 6 bandes; on peut mettre une de ces bandes à chaque branche et 2 aux traverses, ou 2 aux branches et une à chaque traverse. C'est ce dernier cas qu'on va examiner. (*Fig.* 202 *bis*, *pl.* XXXV.)

On a d'abord choisi pour les châssis les 96 premiers et les 96 derniers nombres ; la progression pour les carrés partiels commence à 97, et chaque carré partiel comprend des termes de suite; mais la progression est interrompue à la fin de chacun d'eux, de manière que le terme qui

est le premier du carré suivant, est plus grand de deux unités que le dernier du carré précédent. On aura encore 24 différences, dont 12 en nombres simples, et 12 en complémens. Ces 24 différences sont celles de 106, 116, 126, etc., de 10 en 10, jusqu'à 336 inclusivement : on aura donc 96 + 12 = 108 différences et complémens.

On peut former les deux premières horizontales et les deux premières verticales du châssis extérieur comme suit :

1.re HORIZONTALE.

$$190+175+174+\overline{211}+\overline{197}+173+168+177+178+179$$
$$-172-163-164-167-176-169-\overline{200}-\overline{215}-170$$
$$-171-155=0.$$

2.e HORIZONTALE.

$$146+152+161+\overline{212}+\overline{198}+160+159+144+165+\overline{208}$$
$$-132-145-156-157-158-150-151-\overline{194}-147$$
$$-153-162=0.$$

1.re VERTICALE.

$$214+213+220+\overset{1\text{ h.}}{211}+\overset{2\text{ h.}}{212}+219+218+217+216+\overset{1\text{ h. c.}}{215}$$
$$-196-202-203-204-205-206-207-\overset{2\text{ h. c.}}{208}-209$$
$$-210-105=0.$$

2.e VERTICALE.

$$199+201+195+\overset{1\text{ h.}}{197}+\overset{2\text{ h.}}{198}+191+192+193+\overset{2\text{ h. c.}}{294}+\overset{1\text{ h. c.}}{200}$$
$$-180-181-182-183-184-185-186-187-188$$
$$-189-115=0.$$

Sans s'occuper du châssis intérieur, on construira le châssis extérieur : les complémens seront aux cases opposées ; les nombres d'intersection auront leurs complé-

mens aux cases symétriques. Les deux horizontales coupent les verticales du châssis intérieur aux nombres 43, 353, 385, 379. Les complémens de ces nombres sont aux deux horizontales inférieures. Les verticales du châssis extérieur coupent les deux horizontales du châssis intérieur aux nombres 5, 336, 425, 404, dont les complémens se trouvent sur les deux dernières verticales. Quant au carré central, il faut, pour avoir les diagonales totales complètes, que les nombres autour de ce carré aient leurs complémens placés diagonalement. C'est le seul carré qui est magique avec sa bordure.

Venant au châssis intérieur, puisqu'il y a déjà 4 nombres très-arbitrairement choisis parmi ceux des verticales du châssis extérieur, lesquels ont pour somme 2 couples, il ne faut plus que 17 différences, dont la somme sera $=0$, afin de compléter la 1.re horizontale de ce châssis intérieur. Soit cette 1.re horizontale

$$131+130+128+125+75+15+35+\overline{155}-140-127-\overline{154}-48-65-85-45-25-5=0.$$

Si l'on choisit 66 et 375, répondant aux différences 155 et —154, pour les angles du carré central, leurs opposés diagonalement seront 376 et 67, Maintenant, si l'on a choisi 405 et 404 sur les deux verticales du châssis extérieur, leurs complémens 17 et 38 seront aussi sur la 2.e horizontale du châssis intérieur. Il ne resterait plus que 15 différences pour que cette 2.e horizontale fût complète. Or ces 15 différences sont les complémens des 15 de la 1.re entre les carrés partiels.

Il reste la 1.re verticale, qui a aussi deux couples com-

muns avec le châssis extérieur, et de plus les différences +155+154, communes avec la 1.re horizontale, la 2.e avec signe changé : on peut donc avoir

h. h. c.
155+154+166+126+149+141+142+143—133—134 —135—136—137—138—139—129—95=0.

La 2.e verticale du châssis intérieur aura d'abord 375 et 376, répondant aux différences — 154, — 155 ; d'un autre côté, deux couples des horizontales du châssis extérieur ; enfin les complémens des nombres qui ne font pas partie des intersections. Ainsi cette 2.e verticale est déterminée, et le carré est achevé.

On terminera cette 1.re division par une observation très-importante, afin de faire éviter des essais qui seraient nécessairement sans résultat.

Toutes les fois que l'on doit former un nombre pair de séries de différences, et que l'on n'a pour cette formation qu'un nombre impair d'impairs, la chose est impossible. En effet, pour qu'une série de différences soit $=0$, il est nécessaire que la somme des positives soit égale à celle des négatives : or cela ne peut être lorsque l'une est paire et l'autre impaire, ou, ce qui est la même chose, lorsqu'on n'a qu'un nombre impair d'impairs pour une série ; et l'on arrivera toujours à ce résultat pour la dernière série, lorsque, dans l'origine, l'on n'avait pas un nombre pair d'impairs : cela est général. Voici un exemple sur le carré de 21 :

Qu'on suppose les carrés partiels construits comme à la figure 202 bis ; qu'on veuille faire un carré d'intersection, et former ensuite 6 séries de différences. Cette ma-

nière d'opérer, lorsque le nombre des bandes des châssis est pair, est de toutes la plus expéditive, et celle qui exige le moins d'attention. Qu'on prenne, pour le carré d'intersection, qui est celui de 6, les 18 premiers et les 18 derniers nombres : il restera pour les 6 séries les différences des nombres depuis 19 à 96, plus 12 différences impaires, qui sont celles de 106, 116, 126... 216, ou 5, 15, 25, 35, 45, 55, 65, 75, 85, 95, 105, 115, comme on l'a dit plus haut. Mais la différence de 19 est 202; celle de 96 est 125: il y aura donc ici autant de pairs que d'impairs, puisqu'il y a 78 nombres qui se suivent, et dont les différences sont alternativement paires et impaires. Donc il y aura 39 différences paires et autant d'impaires : on aura donc en tout, pour les 6 séries, 39+12=51 impairs. Or 51 est un nombre impair, et l'on verra qu'on ne peut faire les 6 séries avec 39 pairs et 51 impairs. Chaque série aura 15 différences, puisque le carré d'intersection en prend 6.

On ne pourrait composer les différences d'une série entièrement d'impairs : car il y en aurait nécessairement un nombre pair d'un côté et un nombre impair de l'autre, puisqu'il faut 15 différences. Or cela n'est pas possible, puisqu'une somme serait paire et l'autre impaire, ce qui ne peut donner 0. Si toutes les différences paires étaient en nombre pair, les impaires seraient en nombre impair, ce qui n'est pas possible : la somme ne serait toujours pas =0. Il ne peut arriver que le cas où l'on aurait un nombre impair de pairs et un nombre pair d'impairs : alors la dernière série aurait un nombre pair d'impairs, et il ne resterait pas de pairs, ce qui ne se peut pour avoir somme

$=0$; ou il resterait un nombre pair de pairs, ce qui n'est pas plus possible; ou enfin il resterait un nombre impair de pairs, et le nombre des impairs serait pair, ce qui ne peut être, puisque l'on a toujours eu pour les autres séries un nombre pair d'impairs; et, comme il y en avait en tout, par supposition, un nombre impair, il ne peut en rester un nombre pair : il y en aura donc un nombre impair, et l'on ne peut avoir somme $=0$. Il faut donc conclure qu'on ne peut faire de séries en nombre pair si l'on a un nombre impair d'impairs pour la totalité des séries.

Que l'on compose autrement le carré d'intersection; qu'on prenne les 12 différences 5, 15, 25...115, et 6 autres en suivant la même progression, c'est-à-dire 125·135·145·155·165·175. Comme il y avait 48 différences paires et autant d'impaires de 1 à 96, il restera 42 impairs. Or 42 est pair, et l'on peut former les 6 séries comme suit :

$$220+219+218+217+216+215+214-213-212-211-210-209-151-156-157=0$$
$$208+207+206+205+204+203+202-201-200-199-198-197-141-147-152=0$$
$$196+195+194+193+192+191+190-189-188-187-186-185-133-140-143=0$$
$$184+183+182+181+180+179+178-177-176-174-173-138-139-144-146=0$$
$$172+171+170+169+168+167+166-164-163-162-161-131-132-134-136=0$$
$$160+159+158+154+153+149+142-150-148-137-130-129-128-127-126=0$$

Ces séries se placent aisément et se forment avec facilité, d'après la manière dont les nombres se suivent. Lorsqu'on arrive à la dernière, et qu'on voit la différence qui peut régner entre deux sommes composées de nombres devant faire à peu près somme égale, on arrive promptement au résultat en changeant deux nombres ayant entr'eux moitié de la différence trouvée, ou deux nombres contre deux nombres, etc. Par exemple, que la dernière série eût été provisoirement composée par 160+159+158+154+150 +149+148—153—142—137—130—129—128—127 —126 : la somme des positifs est 1078, celle des négatifs de 1072; différence 6, dont la moitié 3 doit être retranchée des positifs et ajoutée aux négatifs. Il n'y a pas de nombre dans les négatifs qui diffère de trois unités en moins des positifs; mais 153 et 142 ont pour somme 195, et 150+148 =198. On fait passer les premiers parmi les positifs, et les seconds parmi les négatifs. Il n'est jamais à craindre que la dernière série ne puisse se former : car les séries comprennent toutes les différences qui ont été réservées pour les former; et lorsqu'on arrive à la dernière, elle aura nécessairement les différences suffisantes pour la composer; ou bien les n plus grandes surpasseront les $n+1$ plus petites, ou les $n+1$ plus petites excèderont les n plus grandes. Dans le premier cas on fera passer une des petites parmi les grandes, et réciproquement, ou deux petites au lieu de deux grandes, de manière à ce que les nombres échangés diffèrent de la moitié de la différence entre la somme des grandes et celle des petites différences. Dans le 2.e cas il faut faire quelque changement à l'une ou à plusieurs des différences d'une ou de plusieurs des séries déjà formées.

Soient ces séries comme suit :

$215+213+212+200+193+185+184-210-211-\overset{153}{176}-207-\overset{151}{128}-127-156-187$
$218+217+216+192+190+138+126+129-219-220-206-194-195-178-214$
$209+205+170+171+174+177+130+131-201-202-203-204-199-191-167$
$198+197+196+188+186+183+166-189-180-181-182-159-140-141-142$
$179+136+149+132+133+134+137+164-173-172-168-169-162-163-157$

On voit qu'on n'a pas suivi ici l'ordre des différences approximativement : elles ont été choisies arbitrairement. Il reste pour la dernière série les différences

208, 161, 160, 158, 154, $\overset{176}{153}$, 152, $\overset{128}{151}$, 150, 148, 147, 146, 144, 143, 139. La somme des 7 plus grandes est 1147; celle des 8 plus petites est 1168. On ne peut donc former la série avec les différences restantes; mais que l'on mette 153 et 151 au lieu de 176 et 128 dans la 1.re série : les 7 plus grandes seront $208+176+161+160+\overset{146}{158}+154+152=1169$; les 8 plus petites seront $150+148+\overset{158}{146}+147+144+143+139+128=1145$; mais $1169-1145=24$. Si donc il y a deux différences, l'une des grandes et l'une des petites, qui diffèrent de 12, on substituera l'une à l'autre. On voit que 148 et 160, 146 et 158, ont 12 de différence; qu'on mette 146 au lieu de 158, et l'on aura pour la 6.e série

$208+176+161+160+154+146+152-158-150-148-147-144-143-139-128$

Cet exemple montre ce qu'on aurait à faire dans tous les cas. On l'a choisi compliqué, afin de mieux faire ressortir la marche à suivre. On voit qu'il faut toujours ramener la somme des n plus grandes à surpasser celle des $n+1$ plus petites, si elle ne lui est pas égale, et l'on obtient ensuite cette égalité comme ci-dessus.

Lorsqu'on a les séries, on en met la moitié en horizontale, et l'autre moitié en verticale. On achève avec les complémens; avec la méthode ci-dessus on n'est obligé d'avoir égard ni aux intersections, ni à la différence des châssis, et c'est celle qu'il faut employer de préférence : elle est la plus facile et la plus expéditive. Il n'y a d'attention à avoir que pour la formation du carré d'intersection : il doit toujours être tel que les différences restantes donnent un nombre pair d'impairs, comme il a été dit. Il est clair que cette méthode ne peut s'appliquer qu'au cas où les branches du châssis sont en nombre pair : car alors les bandes parallèles sont aussi en nombre pair, à raison de la symétrie.

Ce qui a été dit pour les séries s'applique aux groupes : on ne peut pour les former avoir un nombre impair d'impairs. Ces groupes sont de vraies séries, et il faut, avant d'opérer, s'assurer que la condition existe; si l'on néglige cette précaution, on arrivera à un dernier groupe dont la formation sera impossible.

Deuxième Division.

LES PARTIES SÉPARÉES PAR LE CHASSIS À TRAVERSES NE SONT PAS DES CARRÉS.

On ne donnera qu'un petit nombre d'exemples de ce genre de carré, étant obligé d'y revenir ailleurs. On présentera les observations nécessaires pour faire éviter de vaines tentatives.

Le plus petit carré du genre ci-dessus est celui de 7.

ARTICLE PREMIER.

CARRÉ DE 7.

Ce carré se construit facilement (*figure* 203, *planche* XXXV): il ne peut avoir plus de trois bandes en trois branches. On peut prendre, pour les 16 cases ne faisant pas partie du châssis à traverse, les huit premiers et les huit derniers nombres. On peut ensuite faire un carré d'intersection par la série 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37, 41; le moyen en fait partie, et se trouve au centre de la progression et du carré. Il reste douze différences, dont quatre paires et huit impaires : les groupes sont donc possibles. Il faut qu'une différence soit égale à deux. Ces différences sont :

10+15—40	15+10—35	20+5—30
11+14—39 (9)	16+ 9—34 (14)	22+3—28
12+13—38	18+ 7—32	23+2—27
14+11—36	19+ 6—31	24+1—26

Les quatre plus grandes 15+14+13+11 ont pour

somme 53; les huit petites différences 10+9+7+6+5 +3+2+1 valent 43. Différence des deux sommes, 10; la moitié = 5. Que l'on mette, par exemple, 9 au lieu de 14 parmi les grandes, et 14 au lieu de 9 parmi les petites : on peut faire les groupes 15=14+1.... 9=7+2.... 13=10 +3.... 11=5+6. Le premier est forcé; la construction dispense de s'occuper des diagonales. Substituant les nombres aux différences, on aura le carré de la figure.

On a ici trois carrés, savoir : le carré central, qui est le carré de 4; celui d'intersection, et le carré total. Il y a même, d'après la construction, une espèce de magie dans les cases entre le carré de 4, et dont voici la forme :

10 39 26
12 14 36 38
16 32 27
28 30 20 22
40 11 24
35 31 19 15
34 18 23

Toutes les lignes horizontales ou verticales où il y a trois nombres, donnent pour somme 75 = 3 fois le moyen; celles où il entre quatre nombres ont pour somme 100 = 4 fois le moyen.

Le carré de la figure pourrait se transformer en carré à bordure double : le carré d'intersection serait le carré central; celui de 4 serait aux angles (Voir *planche* XXXV, *figure* 203 *bis*).

On peut remarquer dans cette double bordure que les cases en diagonale ont leurs complémens en diagonale aux

cases symétriques; il en est de même des autres cases d'intersection aux angles. Les nombres aux cases à gauche du carré ont leurs complémens aux cases opposées; ceux aux cases du dessus du carré central ont leurs complémens au bas, mais non aux cases correspondantes. Ce genre de bordures est remarquable; il est d'ailleurs conforme à ce qui a été dit. En effet les deux groupes horizontaux ont pu être placés à fantaisie; il en est de même des verticaux. Ainsi on peut mettre l'un pour l'autre deux des huit groupes qui couvrent le carré : leur somme étant toujours 75, la bordure sera exacte. Il suffit que les groupes complémentaires soient convenablement placés, c'est-à-dire que les deux horizontaux contiennent les complémens des deux groupes horizontaux. Il en est de même des verticaux. On a toujours trois carrés : le central, celui d'intersection, et le carré total.

ARTICLE II.

CARRÉ DE 9.

Si le châssis a 2 bandes, et la traverse une seule, on pourra faire le carré central avec les 8 premiers et les 8 derniers nombres; le carré d'intersection, avec les 25 nombres du milieu. Il restera les différences des nombres depuis 9 jusqu'à 28, ou 20 différences, dont 10 paires et 10 impaires. Il faudra 4 groupes tels que 2 différences soient égales à trois, ou que 8 différences en vaillent 12. Les 8 grandes différences sont $32+31+30+29+28+\overset{24}{27}+26$ $+25=228$; les 12 petites sont $\overset{27}{24}$, 23, 22, 21, 20, 19,

18, 17, 16, 15, 14, 13=222. Elles contiennent 6 impaires, les grandes en ont 4. Ainsi les groupes sont possibles; la différence de 228 à 222=6; la moitié=3. Mettant 24 parmi les grandes, et 27 parmi les petites, on aurait, par exemple, les groupes

32+31=22+21+20.... 29+30=27+19+13....
28+24=23+14+15.... 25+26=18+17+16

Il est inutile de donner la figure de ce carré, qui se construit sur le champ, d'après les données ci-dessus.

Si le châssis à traverse n'avait qu'une bande à chacune des branches, et si le carré central de 6 était distribué de manière à avoir, ou deux nombres aux angles, et un seul de chaque côté de la traverse, ou un seul aux angles, et deux près de la traverse, on ne parviendrait pas à faire le carré: car, après avoir formé celui d'intersection, qui a 3 pour racine, et avoir fait celui de 6 avec les 18 premiers et les 18 derniers nombres, on aurait employé en tout autant de pairs que d'impairs. Les 18 différences restantes auraient encore 9 pairs et 9 impairs; le moyen n'est pas compris dans l'énumération. On ne pourrait donc pas former les groupes, puisqu'il reste un nombre impair d'impairs. Ainsi on peut faire un carré avec châssis à traverse d'une manière, et ne pas y parvenir d'une autre manière : il faut donc faire usage de la théorie des pairs et impairs. Sans cette attention on distribuera les carrés, on fera le tableau des différences, on composera les premiers groupes, et, lorsqu'on arrivera au dernier, on se trouvera arrêté, et le travail commencé deviendra inutile.

Il est un autre moyen de s'assurer qu'on ne peut faire

les groupes : après avoir distribué à part les nombres qu'on destine soit au carré central, soit à celui d'intersection, on fera la somme des différences les plus grandes, dans les proportions connues pour chaque cas, ensuite la somme des petites restantes. Si les deux sommes sont paires ou impaires, les groupes peuvent avoir lieu ; si les sommes sont, l'une paire et l'autre impaire, cela n'est plus possible : car les sommes ne peuvent être égales avant réfusion, puisque les sommes ne sont pas de même nature ; mais après réfusion, on n'aurait rien changé. En effet, si l'on met pair pour pair, ou impair pour impair, les choses sont dans le même état ; si l'on met pair pour impair, la somme paire deviendra impaire, et la somme impaire deviendra paire. Ou, mieux, la différence des deux sommes étant impaire, on ne peut en prendre la moitié : par conséquent il n'y a pas de réfusion possible.

ARTICLE III.

CARRÉ DE 12.

Quoique le carré de 12 soit coupé par le châssis à traverse de deux bandes, de manière qu'il y ait symétrie sans régularité, la construction n'en sera pas moins facile. (*Figure* 204, *planche* XXXIV.)

On fera le carré de 8 par la méthode expéditive, avec les 32 premiers et les 32 derniers nombres. Ceux-ci se trouveront aux cases symétriques des premiers. Si l'on fait ensuite le carré d'intersection par la méthode expéditive du carré de 4, avec les 8 nombres suivans et les 8 précédens, les complémens seront toujours aux cases symé-

triques. On aura donc en diagonale 1 + 144 = 134 + 11 = 28 + 117 = 38 + 107 = 145 = un couple : il n'en faudra donc plus que deux pour la compléter. Il en sera de même de la 2.e diagonale.

Les deux carrés, central et d'intersection, se construisent sur le champ, et sur la figure tracée, conformément aux principes donnés. Le moyen est 72,5, les nombres restans sont de 41 à 72, et les différences de 31,5 à 0,5. On fera ensuite quatre séries de différences, dont on placera deux en horizontale et deux en verticale; les deux autres verticales et horizontales sont remplies par les séries complémentaires. On pourra donc faire :

1.re HORIZONTALE.

31,5+30,5—29,5—28,5—27,5—26,5+25,5+24,5

2.e HORIZONTALE.

23,5+22,5—21,5—20,5—19,5—18,5+17,5+16,5

1.re VERTICALE.

15,5+14,5—13,5—12,5—11,5—10,5+ 9,5+ 8,5

2.e VERTICALE.

7,5+ 6,5— 5,5— 4,5— 3,5— 2,5+ 1,5+ 0,5

On voit avec quelle facilité se forment ces séries. Il est plus commode de réserver, pour les séries, des nombres de suite que des nombres isolés. On pourra toujours alors former la première série en prenant les premiers grands nombres, ou plutôt les premières grandes différences. On mettra le quart de ces différences choisies positivement, la moitié suivante négativement, le dernier quart positivement. Agissant de même pour les séries sui-

vantes, et commençant toujours par les plus grandes restantes, on obtiendra sur le champ toutes les séries, comme dans l'exemple ci-dessus.

Lorsqu'on a placé deux séries horizontalement ou verticalement, et en général moitié des séries dans les lignes horizontales, et moitié dans les lignes verticales, les séries complémentaires parallèles se mettent où l'on veut : cela est tout-à-fait arbitraire; il suffit qu'elles soient sur les lignes de même espèce, et que les complémens soient sur la même ligne que leurs nombres.

Il n'y a plus à s'occuper que des diagonales. Ici elles doivent avoir encore deux couples composés, savoir : par deux différences de l'horizontale et deux de la verticale; l'une des différences de chaque ligne aura son signe changé. Il est aisé d'obtenir ces couples; ils peuvent être :

$$\overset{1\,h.}{-28{,}5}\overset{1\,h.c.}{+27{,}5}\overset{1\,v.}{-10{,}5}\overset{1\,v.c.}{+11{,}5}=0$$

Substituant les nombres aux différences, on aura le carré de la figure 204.

La construction qui précède est facile, élégante et curieuse, et prouve en même temps que les carrés pairs, qui avaient embarrassé la plupart des auteurs, présentent en général moins de difficulté que les impairs, lorsqu'ils sont d'une racine élevée : il suffirait, à la rigueur, de savoir construire le carré de 4, et de faire châssis à traverse; d'opérer ensuite par séries, comme on vient de le dire. Il est inutile de faire le tableau des différences. On peut même se dispenser d'opérer par differences. La 1.re série, par exemple, étant de huit nombres, aurait les deux plus grandes différences 31,5+30,5, ou les deux plus pe-

tits nombres, 41, 42; ensuite quatre différences négatives, savoir : 29,5, 28,5, 27,5, 26,5. Ce sont les différences des complémens de 43, 44, 45, 46 : on aura donc 102, 101, 100, 99; enfin deux différences positives, 25,5, 24,5, qui répondent aux nombres 47, 48. En résumé, la 1.re série aura son premier quart composé des plus petits nombres allant en augmentant à partir du plus petit. La moitié suivante comprendra les complémens des nombres suivans. Ces complémens vont en diminuant, puisque les nombres suivans vont en augmentant. Enfin le dernier quart se composera des nombres suivans; la 2.e série commencera par le plus petit des nombres restans, et l'on agira comme pour la précédente.

On va terminer par un exemple de carré dont la racine n'est divisible que par 2, et l'on choisira celui de 18.

ARTICLE IV.

CARRÉ DE 18.

Ce carré a été fait sans employer les différences. (*Figure* 205, *planche* XXXVI.) Il y a 5 branches au châssis : les deux extérieures n'ont qu'une bande; celle du milieu en a 2; les deux restantes en ont 3; le carré est 324 : un couple vaut 325. On a choisi pour le carré central de 8 les 32 premiers et les 32 derniers nombres; ensuite, pour le carré d'intersection, qui est celui de 10, les 50 suivans et les 50 précédens. Le plus petit est 33, et le dernier 82 pour les suivans; le premier des précédens est 243, et le dernier 292. Ce carré de 10 sera construit par l'une des méthodes données, et avec les nombres

ci-dessus. Il reste ceux de 83 à 242. On n'aurait plus à former que 10 séries de 8 différences, savoir : 5 en horizontale, et autant en verticale. Mais, d'après ce qui a été dit plus haut, il est inutile de recourir aux différences, en faisant attention que, si l'on prend 8 différences de nombres qui se suivent, de manière que les deux plus grandes et les deux plus petites aient un signe, et les 4 intermédiaires signe contraire, le résultat sera $=0$. En effet, si la plus grande est d, on aura $d+d-1+d-6+d-7=d-2+d-3+d-4+d-5$. D'après cela, qu'on prenne les deux plus petits nombres qui répondent aux plus grandes différences, ici 83, 84 ; qu'on en passe 4 ; et qu'on prenne les 2 suivans 89, 90 : on aura 4 petits nombres. Qu'on prenne ensuite le complément de 85, qui est 240 ; celui de 86 sera 239, et ainsi de suite. La 1.re série aura donc les nombres $83+84+89+90+237+238+239+240=1300=4 \cdot 225$. Les 4 nombres 237, 238, 239, 240, sont bien les complémens de 88, 87, 86, 85. Ceux de 83, 84, 89, 90, seraient 242, 241, 236, 235, dont la somme est et doit être $=$ celle des 4 complémens de 85, 86, 87, 88. On aurait de même $91+92+97+98+222+231+230+229=1300$. Ces derniers sont complémens de 96, 95, 94, 93, et ainsi des autres. Les complémens achèvent le carré, dont la formation est la plus facile de toutes.

Il faut, pour être assuré de pouvoir construire ce genre de carré, que les cases autour des angles soient disposées carrément. Ainsi il y en aurait une, ou 4, ou 9, ou 16, etc.

QUATRIÈME SECTION.

LA PARTIE CENTRALE D'UN CHASSIS EST ELLE-MÊME UN CARRÉ.

Le plus petit nombre qui puisse avoir un carré au centre est 7.

ARTICLE PREMIER.

CARRÉ DE 7.

Soit formé le carré du centre par les 9 nombres du milieu de la progression; soit la verticale du châssis par les différences $\overline{24}+23+22-21-20-\overline{19}-9$, et l'horizontale $\overset{h.}{24}+\overset{h.\,c.}{19}-18+13-15-16-17$. On voit que 1 et 6 seront aux intersections de l'horizontale; il reste les différences 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 14, en plus et en moins, avec lesquelles il faut former les parties extérieures du carré. Donc cinq de ces différences doivent donner pour somme 0. Soit la verticale $14+12-10-11-5$: l'horizontale doit avoir deux différences communes, dont une avec changement de signe. Soient ces différences $-\overset{h.}{5}$ $\overset{h.\,c.}{+10}$: il faut voir si avec les 3 restantes, 6, 7, 8, on peut faire cette horizontale. Or les différences de ces différences sont $6+7+8=21$.... $6+7-8=5$.... $6+8-7=7$.... $7+8-6=9$; mais $10-5=5$: il n'y aura donc que $8-7-6$ qui convienne, et l'on aura pour l'horizontale $10+8-5-6-7$. Le carré résultant de ces données se trouve (*figure* 206, *planche* XXXVI). Il n'y a même que la

combinaison 6+7—8=5 qui satisfasse à l'horizontale, d'après le choix de la verticale; et ce n'est pas seulement à raison des deux différences 10—5 supposées : en effet les différences de différences de la verticale seront 14—12 =2.... 14+10=24.... 14+11=25.... 14+5=19.... 12+10=22.... 12+11=23.... 12+5=17.... 11—10 =1.... 10—5=5.... 11—5=6. On ne voit que 10—5 =5 qui corresponde à l'une des 4 quantités 21, 9, 7, 5.

Il peut se faire que le choix des différences pour une ligne, donne plusieurs combinaisons pour l'autre, ou n'en donne aucune. Ainsi, soit la verticale 14+11—12—7—6 : les 3 différences restantes, 5, 8, 10, donnent 5+8+10 =23... 5+8—10=3... 5+10—8=7... 8+10—5=13 : d'où il suit que 23 et 3 conviennent : ainsi les horizontales 11+12—5—8—10, et 14—11+10—5—8, pourront avoir lieu par suite de la verticale choisie. Mais si celle-ci était 14+8—11—5—6, il resterait 7, 10, 12, dont les différences sont 7+10+12=29....7+10—12 =5....7+12—10=9... 10+12—7=15. Ainsi on aurait 5, 9, 15, 29. Il faut voir si les différences de la verticale, 2 à 2, donnent l'une ou l'autre ces 4 différences, et il est très-inutile de les écrire. On s'assure, à mesure qu'on les compare, si l'on obtient 5, 9, 15, 29 : il n'y a que 11—6=5 qui satisfasse. Si l'on n'avait pas de résultat convenable, il faudrait changer quelque chose à la verticale, afin d'obtenir une horizontale.

On verra (*figure* 207, *planche* XXXVI) le carré de la figure 206 avec deux bordures exactes. L'une est formée avec le châssis : c'est l'extérieure; l'autre avec le tour du carré de 7. Le carré central reste le même.

Il suit de là qu'ayant carré à double bordure de 7, on peut le transformer en carré à châssis, dont la partie centrale est un carré.

Cette nouvelle forme est curieuse, et doit être retenue.

ARTICLE II.

CARRÉ DE 8.

On a choisi les 16 nombres du milieu de la progression pour le carré du centre; le châssis a été composé par les différences suivantes :

$\overline{29,5}+\overline{25,5}+24,5+8,5-20,5-21,5-22,5-23,5$ horiz.

h. h. c.

$29,5+30,5+31,5+16,5-25,5-26,5-27,5-28,5$ vertic.

Les différences restantes sont 9,5, 10,5, 11,5, 12,5, 13,5, 14,5, 15,5, 17,5, 18,5, 19,5. Qu'on fasse l'horizontale du tour du carré 17,5+12,5+10,5—15,5—13,5—11,5: il ne restera que 19,5, 18,5, 14,5, 9,5. Il faut que deux différences de l'horizontale aient une différence égale à l'une de celles que donneraient les 4 dernières différences. Or celles de l'horizontale sont 2 à 2 les suivantes : 17,5—12,5 =5.... 17,5—10,5=7.... 17,5+15,5=33.... 17,5+13,5 =31... 17,5+11,5=29... 12,5—10,5=2... 12,5+15,5 =28... 12,5+13,5=26... 12,5+11,5=24... 10,5+15,5 =26.... 10,5 + 13,5=24.... 10,5 + 11,5 = 22... 15,5 —13,5=2... 15,5—11,5=4... 13,5—11,5=2. On aura donc 2, 4, 5, 7, 22, 24, 26, 28, 29, 31, 33.

Les différences restantes donneraient 19,5+18,5+14,5 —9,5=43.... 19,5+18,5+9,5—14,5=33... 19,5+14,5 +9,5—18,5=25.... 18,5+14,5+9,5—19,5=23.... 19,5 +18,5—14,5—9,5=14.... 19,5+14,5—18,5—9,5=6..

18,5+14,5—19,5—9,5=4 : donc 4 et 33 seront les seules différences de différences communes. On obtiendra ainsi
h. h. c.
la verticale —15,5—17,5—14,5+19,5+18,5+9,5.

On aura donc facilement le carré (*fig.* 208, *pl.* XXXVI).

Ce carré changé en carré à double bordure se verra (*figure* 209.)

ARTICLE III.

CARRÉ DE 9.

Le carré du centre peut être de 5 ou de 3. Pour le carré de 5 de racine on n'aura qu'une forme : car il n'y aura qu'une case pleine aux angles. Le carré de 3 de racine entraînera deux formes : car le châssis peut avoir ses branches d'une seule bande, auquel cas le châssis aura 4 nombres disposés carrément aux angles; ou le châssis aura deux bandes aux branches, et l'on n'aura qu'une case pleine aux angles. On va examiner ces 3 formes, dont la construction est un peu différente.

LE CARRÉ DU CENTRE EST CELUI DE 5.

Qu'on prenne les 25 nombres du milieu de la progression. Dans les carrés impairs le moyen fait nécessairement partie du carré du centre, mais n'est pas nécessairement au centre de ce carré.

On peut former le châssis avec les différences comme suit, observant que la plus petite différence est 13, et la plus grande 40 :

40+36+32+31—25—27—28—29—30 horizontale.
h. h. c.
40—36+37+38+39—33—34—35—16 verticale.

Pour la partie extérieure du carré on peut choisir deux séries de différences, comme

26+22+20—24—13—14—17 horizontale.
h. h. c.
26+24+23—21—19—18—15 verticale.

Substituant les nombres aux différences, et mettant les complémens aux cases opposées, et ceux des angles en diagonale, il viendra le carré (*fig.* 210, *pl.* XXXVI).

On verra (*figure* 211) le même carré avec bordures régulières; le châssis forme l'extérieure.

LE CARRÉ DU CENTRE EST CELUI DE 3.

Examinant d'abord le cas où le châssis n'a qu'une bande à chaque branche, on aura 4 cases aux angles. (*Fig.* 212, *planche* XXXVI.)

Soit le carré du centre construit avec les 9 nombres du milieu de la progression; ensuite le carré des angles formé avec les 8 premiers et les 8 derniers nombres, d'après la méthode expéditive du carré de 4; enfin le châssis par deux séries de différences, par exemple :

19+16+15+13—17—14—12—11— 9 horizontale.
h. c. h.
—19—17+20+22+24+26—28—18—10 verticale.

Les différences restantes sont 5, 6, 7, 8, 21, 23, 25, 27, 29, 30, 31, 32, avec lesquelles il faut faire 4 groupes de 3 différences pour les parties du milieu du carré extérieur; les 4 plus grandes différences sont 29+30+31+32=122. Les 8 plus petites, 5, 6, 7, 8, 21, 23, 25, 27, ont pour somme 122 : les groupes seront donc 27+5=32.... 25+6=31.... 23+7=30.... 21+8=29.

Quant aux bordures dans lesquelles peut se changer

ce carré, on aura toujours le carré du centre, le carré des angles, le carré avec la bordure double, et le carré total. Il y en a autant que dans le carré à châssis : car dans ce dernier, outre le carré du centre, celui des 16 cases aux angles, et le carré total, on a encore celui qui résulte du rapprochement de toutes les parties, à l'exception du châssis. La bordure intermédiaire est exacte en ce sens, que ses lignes contiennent 7 fois le moyen, ou 287; mais les nombres opposés ne sont pas toujours complémens l'un de l'autre; et, la bordure intérieure n'étant pas magique, il faut les avoir toutes deux pour que le carré soit régulier. Il représente celui du rapprochement des parties ou de jonction. Ce carré à bordures se trouve (*figure* 213, *planche* XXXVI).

Il faut conclure des deux constructions précédentes du carré de 9, que toutes les fois qu'un carré a deux bordures exactes, la plus extérieure peut faire un châssis, et l'intérieure composer les parties d'un carré, lesquelles réunies au carré central, donnent un carré exact.

Si un carré à bordure extérieure exacte, et bordure double autour d'un carré central, est donné, on peut encore en faire un carré à châssis : la bordure extérieure fait le châssis; les 16 cases des angles de la bordure double deviennent les 16 cases aux angles du carré à châssis; et celles qui couvrent le carré central, les autres parties détachées du carré central.

Il y a une autre manière de faire le même carré de 12 à châssis d'une bande par branche, et carré central de 3.

Ayant toujours formé le carré central de 3 avec les 9

nombres du milieu de la progression, on peut faire le châssis par les différences

40+39+38+37—36—35—34—33—16 horizontale.

h. h. c.
40+36+32+31—30—29—28—27—25 verticale.

Ensuite deux des horizontales et autant des verticales, en remarquant que chacune de celles-ci doit avoir deux différences de chaque horizontale, dont une avec changement de signe; les lignes auront sept différences, châssis non compris. Soient ces lignes

26+24+23—22—21—20—10 1.re horizontale.

19+18+17—15—14—13—12 2.e horizontale.

1 h. 1 h.c. 2 h.c. 2 h.
26+20—19—15—11+ 7— 8 1.re verticale.

1 h.c. 1 h. 2 h.c. 2 h.
22—21+14—13+ 9— 5— 6 2.e verticale.

Lorsqu'on arrive à la 2.e verticale, il faut voir si, avec les différences communes qu'on a choisies, les trois restantes peuvent compléter cette 2.e verticale. Or, comme 22+14—21—13=2, il faut que les 3 différences 5, 6, 9 puissent faire 2; mais on voit sur le champ que 6+5—9 =2 : donc la verticale est possible avec les 4 différences choisies. Si l'on n'obtenait pas de résultat convenable, on choisirait d'autres différences, ou l'on ferait une correction. Il vaut mieux commencer par chercher les différences de différences des restantes : elles sont ici 9+5+6 =20.... 9+5—6=8.... 9+6—5=10.... 5+6—9=2. Les différences restantes de la 1.re horizontale sont 24+23—22—21—10; celles de la 2.e sont 18+17 —14—13—12. Or toute réunion de deux différences de différences parmi celles de la première horizontale avec

deux différences de différences de la 2.e horizontale, dont la somme sera 2, 8, 10, 20, conviendra pour la 2.e verticale.

Les différences de différences, 2 à 2, de la 1.re horizontale, sont 1, 46, 45, 34, 45, 44, 33, 1, 12, 11.

Les différences de différences de la 2.e horizontale sont 1, 32, 31, 30, 31, 30, 29, 1, 2, 1.

Si l'on ajoute chacun des résultats de la 1.re horizontale avec tous ceux de la 2.e, en plus et en moins, de manière à n'avoir ni 0, ni quantité négative, en supprimant toute somme qui n'est ni 2, ni 8, ni 10, ni 20, l'on aura

1+ 1= 2.... 1+ 1= 2.... 1+ 1= 2....
34—32= 2.... 1+ 1= 2.... 1+ 1= 2....
1+ 1= 2....32—12=20....12— 2=10....
31—11=20....11— 1=10....11— 1=10

On voit qu'on a répété plusieurs fois les mêmes résultats, parce qu'ils ne proviennent pas des mêmes différences, d'après la manière dont on a opéré. On aura donc douze manières de faire la 2.e verticale, les trois premières lignes restant telles qu'on les a formées.

On a pris 22—21=1, qui est la 8.e différence de différences de la 1.re horizontale, et 14—13, qui est la 8.e de la 2.e horizontale, et=1, pour les différences communes de la 2.e verticale.

Venant à la 2.e forme du carré de 9, avec carré central de 3, le châssis aura deux bandes à chaque branche, et le carré a été formé comme suit (*fig.* 216, *planch.* XXXVII).

On a continué à former le carré central de 3 avec les 9 nombres du milieu de la progression. Le carré d'intersec-

tion du châssis a été fait, par la méthode expéditive du carré de 4, avec les 8 nombres qui précèdent et les 8 nombres qui suivent ceux du milieu. Ces nombres sont de 29 à 36 et de 46 à 53. L'extérieur du carré, châssis non compris, a été formé par les différences

$40 + 39 - 38 - 21 - 20$ horizontale.

$\overset{h.}{40} + \overset{h.\,c.}{38} - 37 - 22 - 19$ verticale.

Ces lignes et leurs complémens, ajoutés au carré central, ont donné le carré de 5. Il reste à remplir les cases du châssis, dont les intersections ne font plus partie. Or, si l'on partage les 20 différences restantes en 4 séries, et qu'on en mette deux en horizontale et deux en verticale, avec les complémens dans les autres lignes, le carré total sera formé.

Les 8 grandes différences restantes sont 36, 35, 34, 33, 32, 31, $\overset{23}{30}$, 29, dont la somme = 260. Les 12 plus petites sont 28, 27, 26, 25, 24, $\overset{30}{23}$, 18, 17, 16, 15, 14, 13 = 246; la différence des deux sommes est 14, dont la moitié est 7. Faisant passer, par exemple, 23 des petits au lieu de 30 des grands, et réciproquement, on pourra former les séries

$36+23-30-14-15=0\ldots 35+34-28-25-16=0\ldots$
$33+29-27-17-18=0\ldots 32+31-26-24-13=0$

Les nombres de chaque série se placent à volonté dans leur ligne, qui est aussi choisie arbitrairement. Les complémens achèvent le carré.

On verra (*figure* 217, *planche* XXXVII) le même carré avec première bordure exacte. La bordure extérieure est double, et se forme avec le châssis; les 16 cases aux angles donnent le carré d'intersection de la figure 216.

Il est bon de se familiariser avec les transformations du carré de 9 données dans cet article.

ARTICLE IV.

CARRÉ DE 10.

On terminera cette section par le carré de 10 (*figure* 214, *planche* XXXVII).

Soit le carré du centre formé par les 8 premiers et les 8 derniers nombres; le carré des angles, par les nombres de 25 à 32 et leurs complémens. Le châssis peut se construire par les séries

$\overline{41},5+32,5+31,5+30,5+16,5-\overline{40},5-26,5-27,5-28,5-29,5$ } horizontale.

h. h. c.
$41,5+40,5+39,5+38,5+17,5-33,5-34,5-35,5-36,5-37,5$ } verticale.

Les 4 parties du milieu du tour du carré de 8 se formeront au moyen de 4 groupes de différences restantes. Ces différences sont celles de 0,5 à 15,5; et les groupes pourront être les suivans:

15,5+12,5—14,5—13,5.... 11,5+ 8,5— 9,5—10,5....
7,5+ 4,5— 5,5— 6,5.... 3,5+ 0,5— 1,5— 2,5

On trouvera ce même carré avec bordure extérieure faite avec le châssis, exacte, et bordure double (*figure* 215, *planche* XXXVII). Cette bordure double est intérieure ici; elle était extérieure dans la figure 217; quoique construite aussi avec le châssis, sa construction n'était pas la même; et l'on voit que cette bordure extérieure, toujours formée avec le châssis, est simple ou double, selon le nombre de bandes des branches du châssis.

§ 7.

TRANSFORMATIONS DIVERSES DES CARRÉS.

Les transformations de ce paragraphe comprennent les équerres, fausses croix, faux châssis, bandes isolées, etc.; on aurait pu faire plusieurs chapitres pour ces diverses variations; mais, comme il arrive souvent qu'on peut passer d'une transformation à une autre, on a préféré examiner à la fois tout ce qui a rapport aux carrés imparfaits, ou plutôt irréguliers, qui font l'objet du présent paragraphe.

ARTICLE PREMIER.

CARRÉ DE 5 A ÉQUERRE.

On entrera dans des détails particuliers, afin de mettre convenablement sur la voie de la méthode à suivre dans les différens cas que présente ce genre de carrés.

Soit le carré d'équerre, qui est ici nécessairement celui de 3, formé par la progression 1·4·7·10·13·16·19·22·25. Soit 4 l'angle de ce carré faisant partie de la 2.e diagonale: il est inutile de s'occuper de la 1.re, qui passe par celle du carré d'équerre (*figure* 218, *planche* XXXVII). La différence de 4 est +9, le terme moyen étant 13. Soit cette 2.e diagonale (9)+11—10—8—2. Il restait les nombres 2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 12, ou les différences comme ci-dessous.

2 + 11 — 24	8 + 5 — 18
3 + 10 — 23	9 + 4 — 17
5 + 8 — 21	11 + 2 — 15
6 + 7 — 20	12 + 1 — 14

Il faut que deux des différences, 11—10—8—2, l'une avec son signe, l'autre avec signe changé, fassent partie de l'horizontale, et que les deux autres, avec changement de l'un des signes, entrent dans la verticale. Il est ici entendu qu'il s'agit des premières horizontale et verticale : on formera donc les différences de différences, deux à deux, de ces quatre différences, et il viendra, en les groupant convenablement, les résultats suivans :

$$11+10=21\ldots\ldots 11+8=19\ldots\ldots 11+2=13$$
$$8-2=6\ldots\ldots 10-2=8\ldots\ldots 10-8=2$$

Lorsque l'un des groupes fait partie de l'une des lignes, le groupe correspondant doit entrer dans l'autre, avec le signe + ou —; mais on peut toujours prendre l'une des différences de différences positivement : car, dans le cas contraire, il n'y aurait qu'à changer les signes des trois différences ci-dessous, que l'on doit ajouter à cette différence de différences. Cela ne serait qu'un changement de position du carré d'équerre, ou plutôt changement d'horizontale en verticale, et réciproquement. Les différences restantes, après la formation de la 2.e diagonale, sont 1, 4, 5, 7, et il faut que trois de ces différences ajoutées en plus ou en moins, à l'une des différences de différences, donne 0 pour somme. Ces additions donnent $1+4+5=10\ldots\ldots$ $1+4+7=12\ldots\ldots 1+5+7=13\ldots\ldots 4+5+7=16$. Il n'y a que $1+5+7=13$ qui convienne, puisqu'on aurait $11+2=1+5+7$, ou $11+2-1-5-7=0$.

Si l'on a l'horizontale, il faut que la verticale ait l'autre groupe $10-8=2$, ou $8-10=-2$; plus deux différences de l'horizontale, dont l'une avec changement de signe : on

prendra donc les différences de différences de—7—5—1 : elles sont 7—5=2... 7—1=6... 5—1=4. Ces différences de différences seront en plus ou en moins; la verticale aura de plus la différence restante 4, avec l'un ou l'autre signe. Il faut voir les conséquences. On ne peut se servir de 5—1=4, ou 1—5=—4 : car ±4, ajouté à ±4, ne peut donner ±2, quelque arrangement de signe que l'on veuille adopter. 7—1=6 peut être égalé à+2+4, et convient à la verticale, qui sera +7—1—4 (—2); et, comme 2=10 —8, on aura 7—1—4—10+8. On peut arranger les trois lignes diagonale, horizontale et verticale, comme suit :

+11—2—8—10......(+9) diagonale.
—5—7—1+11+2.................. horizontale.
+7—1....... +8—10—4........ verticale.

Et en substituant les nombres aux différences,

2 15 21 23............ (4) diagonale.
18 20 14 2 11..................... horizontale.
6 14 5 23 17........... verticale.

Cette distribution fait connaître immédiatement la place des nombres autour de l'équerre : 2 est à l'angle de la diagonale et de l'horizontale; 15 est en diagonale, et son complément 11 en horizontale, à côté de 2; 23, commun à la diagonale et à la verticale, est à l'angle inférieur, opposé diagonalement à 2, dont il n'est pas le complément; 21 en diagonale aura son complément 5 dans la verticale; 14, commun à l'horizontale et à la verticale, sera à l'angle supérieur de gauche, son complément 12 sera placé diagonalement; 20 en horizontale aura son complément en verticale sous 14; enfin 18 en horizontale et 17 en verticale

seront au milieu de ces lignes. Les complémens achèvent le carré, comme on le voit (*figure* 218).

Si l'on avait pris de l'horizontale 7—5=2, et 10—8=2 de la diagonale, puisque ce groupe est forcé, comme correspondant à 11+2=13, comme on l'a dit ci-dessus, on pourrait avoir 2+2—4=0, ou bien 10—8+7—5 (—4). On mettrait donc :

+11— 2—10— 8...(+9) diagonale.
—1—7—5+11+ 2................horizontale.
+7—5........+10— 8—4.....verticale.

Substituant les nombres aux différences :

2 15 23 21.....(4) diagonale.
14 20 18 2 11................horizontale.
6 18...........3 21 17.....verticale.

Voici la forme du carré :

18	20	14	11	2
6	8	12	15	24
17	9	4		
3	23			
21	5			

On aura toujours 2, 11, 15, comme au carré de la figure 218; mais 18 prendra la place de 14, et réciproquement. 21 et 23 prendront la place l'un de l'autre; les complémens suivent les changemens de leurs nombres.

En conservant le carré de la figure 218, mais autrement

distribué, on peut avoir une transformation différente, qui serait une fausse croix.

ARTICLE II.

CARRÉ DE 5 AVEC FAUSSE CROIX.

Qu'on construise le carré de 3 comme à la figure 218, comme on voit qu'il est distribué (*figure* 219, *planche* XXXVII) : il viendra fausse croix ou chevalet; les différences restantes sont les mêmes qu'à l'article précédent. L'inspection de la figure indique que la 1.re diagonale, ayant un couple à ses angles, n'a plus besoin que de trois différences dont la somme soit = 0; et que la 2.e diagonale ne doit avoir qu'une différence avec son complément, puisqu'elle comprend déjà la diagonale du carré de 3. On verra de plus, qu'après avoir construit ces diagonales, il y aura des cases nécessairement remplies en horizontale et en verticale. Soit la 1.re diagonale 7—5—2=0. La verticale doit avoir une différence commune avec la diagonale : c'est la 2.e case qui la contiendra; plus une autre différence commune, mais avec changement de signe : elle sera à la 4.e case de cette verticale, et complément de l'intersection des deux diagonales. Soit cette verticale 7+2—11—8+10. L'horizontale doit avoir une différence commune avec cette même 1.re diagonale : c'est celle d'intersection des deux diagonales, et par conséquent elle sera —2. Elle aura de plus une autre différence commune avec cette 1.re diagonale, mais avec changement de signe : elle sera donc + 5. Enfin elle aura une différence commune avec la verticale : c'est celle d'intersection de ces deux lignes ; elle peut être + 10,

ou — 11, ou — 8; et, comme il ne reste que 4 et 1, il faut voir si avec ces données l'horizontale est possible. Or 4 et 1 peuvent donner 4 + 1, 4 — 1, 1 — 4, — 1 — 4; ou bien 3, 5, —3, — 5; et, puisque l'on a déjà 5 — 2 = 3, reste à savoir si 3 ajouté à l'une des 4 différences de différences ci-dessus, peut donner 11, ou 8, ou — 10; et, comme il n'y a que 3 + 5 qui satisfasse à la condition, on aura 3 + 4 + 1 = 8, ou 5 — 2 + 4 + 1 = 8. Enfin 5 — 2 + 4 + 1 — 8 = 0, pour cette horizontale.

Les lignes peuvent être distribuées comme suit, par les différences :

+7—2...—5........ 1.re diagonale.
—2+2............ 2.e diagonale.
+10—11—8+7...+2............... verticale.
—8...—2...+5+4+1...... horizontale.

Substituant les nombres aux différences, on aurait :

6 15..... 18........... 1.re diagonale.
15 11............... 2.e diagonale.
3 24 21 6.... 11............... verticale.
21...15......8 9 12..... horizontale.

Il n'y a plus de difficulté pour placer ces nombres.

Il ne faudrait pas croire que toute progression soit propre à donner cette croix, pas plus que les autres transformations : il est bon de rechercher ces progressions, c'est le moyen de mettre sur la voie lorsqu'on aura d'autres racines.

L'on a 18 carrés de 3 qui peuvent se former avec les nombres de 1 à 25. Il suffit de 4 de ces nombres pour marquer les progressions convenables à ces compositions

de carrés de 3; le moyen 13, dont la différence = 0, en fait toujours partie.

Dans ce qui suit, les nombres sont remplacés par les différences : la première de celles-ci indique la différence de la progression ou des progressions; la seconde, comparée à la première, désigne, par leur différence, l'intervalle des progressions, lesquelles ne peuvent être qu'au nombre de 3. Ainsi, par exemple, les 4 différences 2, 5, 7, 9, montrent que les progressions ont la différence ou raison constante 2, et que l'intervalle est 5 — 2 = 3; les complémens achèvent les progressions. Ici l'on aurait 9 · 7 · 5. . . . 2 · 0 · — 2. . . . — 5 · — 7 · — 9; ou, en nombres, 4 · 6 · 8. . . . 11 · 13 · 15. . . . 18 · 20 · 22. Il résulte qu'avant la première différence on doit supposer 0, et ensuite, mais avec signe contraire, les mêmes différences que celles données.

Cela établi, on va donner le tableau de ces 18 carrés de 3, c'est-à-dire les différences qui servent à les composer. On mettra à la suite les différences restantes, et enfin la diagonale possible avec ces différences restantes.

CARRÉ DE 3.	DIFFÉRENCES RESTANTES.	DIAGONALES.
1 2 3 4	5 6 7 8 9 10 11 12	12—7—5. . . 11—5—6
1 3 4 5	2 6 7 8 9 10 11 12	12—10—2. . . 11—9—2. . . 10—8—2. . . 9—7—2. . . 8—6—2
1 4 5 6	2 3 7 8 9 10 11 12	12—10—2. . . . 12—9—3. . . . 11—9—2. . . . 11—8—3. . . 10—8—2. . . . 10—7—3. . . 9—7—2
1 5 6 7	2 3 4 8 9 10 11 12	12—10—2. . . . 12—9—3. . . . 12—8—4. . . . 11—9—2. . . 11—8—3. . . . 10—8—2
1 6 7 8	2 3 4 5 9 10 11 12	12—10—2. . . . 12—9—3. . . . 11—9—2. . . . 9—4—5. . . . 5—3—2
1 7 8 9	2 3 4 5 6 10 11 12	12—10—2. . . . 11—6—5. . . . 10—6—4. . . . 6—4—2. . . . 5—3—2
1 8 9 10	2 3 4 5 6 7 11 12	12—7—5—. . . . 11—7—4. . . . 11—6—5. . . . 7—5—2. . . . 7—4—3. . . . 6—4—2. . . . 5—3—2

CARRÉ DE 3.	DIFFÉRENCES RESTANTES.	DIAGONALES.
1 9 10 11	2 3 4 5 6 7 8 12	12—8—4. . . . 12—7—5. . . . 8—6—2. . . .
		8—5—3. . . . 7—5—2. . . . 7—4—3. . . .
		6—4—2. . . . 5—3—2
1 10 11 12	2 3 4 5 6 7 8 9	9—7—2. . . . 9—6—3. . . . 9—5—4. . . .
		8—6—2. . . . 8—5—3. . . . 7—5—2. . . .
		7—4—3. . . . 6—4—2. . . . 5—3—2
2 3 5 7	1 4 6 8 9 10 11 12	12—11—1. . . . 12—8—4. . . . 11—10—1. . . .
		10—9—1. . . . 10—6—4. . . . 9—8—1
2 4 6 8	1 3 5 7 9 10 11 12	12—11—1. . . . 12—9—3. . . . 12—7—5. . . .
		11—10—1. . . . 10—9—1. . . . 10—7—3
2 5 7 9	1 3 4 6 8 10 11 12	12—11—1. . . . 12—8—4. . . . 11—10—1. . . .
		11—8—3. . . . 10—6—4. . . . 4—3—1
2 6 8 10	1 3 4 5 7 9 11 12	12—11—1. . . . 12—9—3. . . . 12—7—5. . . .
		11—7—4. . . . 9—5—4. . . . 7—4—3. . . .
		5—4—1. . . . 4—3—1

CARRÉ DE 3.	DIFFÉRENCES RESTANTES.	DIAGONALES.
2 7 9 11	1 3 4 5 6 8 10 12	12—8—4. . . . 10—6—4. . . . 8—5—3. . . .
		6—5—1. . . . 5—4—1. . . . 4—3—1
2 8 10 12	1 3 4 5 6 7 9 11	11—7—4. . . . 11—6—5. . . . 9—6—3. . . .
		9—5—4. . . . 7—6—1. . . . 7—4—3. . . .
		6—5—1. . . . 5—4—1. . . . 4—3—1
3 4 7 10	1 2 5 6 8 9 11 12	12—11—1. . . . 11—9—2. . . . 11—6—5. . . .
		9—8—1. . . . 8—6—2. . . . 6—5—1
3 5 8 11	1 2 4 6 7 9 10 12	12—10—2. . . . 10—9—1. . . . 10—6—4. . . .
		9—7—2. . . . 7—6—1. . . . 6—4—2
3 6 9 12	1 2 4 5 7 8 10 11	11—10—1. . . . 11—7—4. . . . 10—8—2. . . .
		8—7—1. . . . 7—5—2. . . . 5—4—1

Examinant le cas où le carré de 3 serait composé des différences de la première combinaison 4, 3, 2, 1; 0, —1 —2—3—4, ou des nombres 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, qui sont les 9 nombres du milieu de la progression de 1 à 25 :

Puisque la diagonale première aura deux nombres communs avec la verticale, dont un avec changement de signe, il n'y a qu'à former les différences de différences deux à deux des trois de cette diagonale, et les combiner successivement avec trois des différences restantes. Or il y a deux manières de former la diagonale dans le cas particulier, savoir : 12—7—5, et 11—6—5.

S'attachant d'abord à la première 12—7—5, les différences de différences sont 12+7=19.... 12+5=17.... 7—5=2 : on aura donc 2, 17, 19. Les différences restantes sont 6, 8, 9, 10, 11.

La somme des 3 plus petites est 6+8+9=23>19, et à plus forte raison > que les deux autres 17 et 2. Ainsi on ne peut prendre la somme de 3 différences. On aurait ensuite 6+8—9=5... 6+8—10=4... 6+8—11=3..
6+9—8=7..... 6+9—10=5..... 6+9—11=4.....
6+10—8=8..... 6+10—9=7..... 6+10—11=5.....
6+11—8=9..... 6+11—9=8..... 6+11—10=7.....
8+9—6=11..... 8+9—10=7..... 8+9—11=6.....
8+10—6=10..... 8+10—9=9..... 8+10—11=7.....
8+11—6=13.... 8+11—9=10.... 8+11—10=9.....
9+10—6=13.... 9+10—8=11.... 9+10—11=8.....
9+11—6=14.... 9+11—8=12.... 9+11—10=10....
10+11—6=15.... 10+11—8=13.... 10+11—9=12.
On voit qu'il n'y a aucune de ces combinaisons qui soit

$=2=17=19$: ainsi point de verticale pour la diagonale $12-7-5$.

On a recherché ici toutes les combinaisons que peuvent donner les 5 différences 6, 8, 9, 10, 11 ; mais il est clair qu'on n'a pas suivi la marche la plus courte pour s'assurer que la diagonale supposée ne pouvait donner lieu à une verticale. Voici la manière prompte de s'en assurer : après avoir vu que la somme des trois plus petites différences ne pouvait convenir, il est clair qu'il faut que deux différences ajoutées et diminuées d'une troisième donnent l'un des trois résultats 2, 17, 19 ; mais la plus petite 6, ajoutée à 19, donne 25, et la somme des deux plus grandes, $10+11$, ne vaut que 21 : donc on ne peut avoir 19, ou $12+7$ en verticale. Quant à 17, il en est de même : car $17+6=23>21$. Il reste $2=7-5$; mais si l'on ajoute à 2 la plus grande différence 11, on aura $13<6+8=14$, ou plus petit que la somme des deux plus petites différences : donc il n'y a pas de verticale possible avec la diagonale $12-7-5$.

Reste à voir si la diagonale $11-6-5$ peut exister pour le carré choisi.

Les différences de différences sont $11+6$, $11+5$, $6-5$, ou 17, 16, 1. Il reste les différences 7, 8, 9, 10, 12. Les trois plus petites auraient pour somme $24>17>16$; mais $16+7=23>10+12=22$: donc la verticale n'aura ni 17 ni 16. Venant à 1, on ne peut lui ajouter deux différences : car $7+8+1=16>12$. Si on ne lui en ajoute qu'une, que ce soit la plus grande ; on aurait $12-1=13<7+8$: donc cette diagonale ne peut convenir ; l'autre ne pouvait avoir lieu : donc il n'est pas possible de construire le carré

de 3 avec les différences 1, 2, 3, 4, pour avoir fausse croix.

Si l'on passe à 1, 3, 4, 5, il y a 5 diagonales, qui sont: 12—10—2.... 11—9—2.... 10—8—2.... 9—7—2.... 8—6—2 : les différences restantes étaient en tout 2, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.

Le premier système étant 12—10—2, ses différences de différences sont 12+10, 12+2, 10—2, ou 22, 14, 8. Il reste les différences 6, 7, 8, 9, 11; mais on aura 6+7+9=22.... 9+11—6=14.... 6+11—9=8..... 6+9—7=8.... 7+9—8=8 : donc il y aura 5 verticales possibles avec la diagonale choisie. Il s'agit de reconnaître s'il peut y avoir des horizontales qui s'allient à ces diagonales et verticales.

Soit d'abord la verticale 22—6—7—9 : puisque 22 est ici=12+10, l'horizontale aura—10 commun avec la diagonale, et+2, aussi commun, avec changement de signe; et, comme—10+2=—8, et qu'il reste les deux différences 8 et 11, il faut que l'horizontale comprenne ces deux différences en plus ou en moins, qu'elle ait aussi—8, et de plus une différence commune avec la verticale. Qu'on prenne donc les différences de différences de 8 et 11, savoir : 19,—19, 3,—3 : il faut que—8, ajouté à l'une de ces différences de différences, donne une somme=6, ou 7, ou 9 de la verticale; et, comme cela n'est pas possible, il n'y a point de combinaison pour l'horizontale, la verticale étant 22—6—7—9.

La 2.e verticale est 14+6—11—9, ou 12+2+6—11—9; l'horizontale doit avoir—2+10=8; les différences restantes étant 7, 8, leurs différences seront 15, 1, —1, —15;

or $8+1=9$, qui est l'une des différences de la verticale, non communes avec la diagonale, et avec changement de signe; mais $1=8-7$: on aura donc l'horizontale $10-2+8-7-9=0$. Il y aura donc combinaison, et carré à fausse croix.

La 3.e verticale est $8+9-6-11$, ou plutôt $10-2+9-6-11$; l'horizontale aura d'abord $-10-12=-22$; les différences restantes 7 et 8 donnent toujours $15, -15, 1, -1$; et, si l'on ajoute -22 à l'une ou à l'autre de ces différences de différences, on n'aura ni 6, ni 11, ni -9 : donc point de combinaison.

La 4.e verticale est $8+8-9-7$, ou plutôt $10-2+8-9-7$; l'horizontale aura toujours $-10-12=-22$; les différences restantes 6, 11, donnent $17, -17, 5, -5$; or -22, ajouté à l'une de ces dernières différences, ne donne ni 7, ni 9, ni -8 : ainsi point de combinaison.

La 5.e verticale est $8+7-9-6$, ou plutôt $10-2+7-9-6$; les différences restantes 8 et 11 donnent $19, -19, 3, -3$. L'horizontale ayant toujours $-22=-10-12$, on ne peut, en ajoutant -22 à l'une des ces quatre différences, avoir 6, ou 9, ou -7 : ainsi point de combinaison.

Il n'y aura donc, pour le carré 1, 3, 4, 5, et la diagonale $12-10-2$, que la seule combinaison

	12—2	.—10		1.re diagonale.
	—2+2	.		2.e diagonale.
+6—11—9+12	.+2	.		verticale.
—9	.—2	.+10+8—7		horizontale.

Substituant les nombres aux différences, on aurait :

1 15 . 23	1.re diagonale.
. 15 11 .	2.e diagonale.
7 24 22 1 . 11 .	verticale.
22 . 15 . 3 5 20	horizontale.

On agira de même sur les autres diagonales du carré actuel, et sur les diagonales des autres carrés. Cette vérification est indispensable pour ne pas perdre son temps à chercher des combinaisons impossibles.

ARTICLE III.

CARRÉ DE 7 AVEC ÉQUERRE, ET SES TRANSFORMATIONS.

Soit le carré de 7 partagé en deux parties, 4 et 3 (*figure* 220, *planche* XXXVII); que le carré de 4 soit composé avec les nombres 1, 2, 3, 4...6, 7, 8, 9 et complémens; que le carré d'intersection ou de 3 soit construit avec les nombres 5, 10, 15, 20, 25 et complémens : il faut que 25 en fasse partie, étant le moyen, et par conséquent manquant de complément. Soit formée ensuite la diagonale qui ne passe pas par celles des deux carrés : c'est la seconde. Que 1 soit supposé à l'angle du carré de 4, et commun avec la diagonale : la différence de 1 est +24; il faut encore en diagonale six différences, dont la somme soit—24. Qu'on prenne pour ces différences 7+1—2—8—9—13=—24 : il faut former quatre groupes de trois différences chacun : deux sont placés en horizontale, et deux en verticale. Leurs complémens, par ordre, rempliront les autres lignes. Il est clair que les différences de la diagonale doivent faire partie de ces groupes, puisqu'il

doit y avoir trois différences placées diagonalement de chaque côté de la différence 24 de l'angle 1 d'équerre; or les différences restantes sont :

11 + 14 — 39	18 + 7 — 32
12 + 13 — 38 (8)	19 + 6 — 31
13 + 12 — 37	21 + 4 — 29
14 + 11 — 36	22 + 3 — 28
16 + 9 — 34	23 + 2 — 27
17 + 8 — 33 (13)	24 + 1 — 26

Mais, puisque les groupes sont composés de trois différences, il faut que quatre d'entr'elles soient égales aux huit autres, pour que cette formation de groupes soit possible. Or les quatre plus grandes différences ont pour somme 50, et les huit petites n'ont que 40; la moitié de la différence 10 est 5 : faisant donc passer, par exemple, 8 parmi les grandes, et 13 parmi les petites, les sommes seront égales, et les groupes pourront être :

14—13—1=0..... 12—9—3=0.....
11— 7—4=0..... 8—6—2=0

On peut remarquer que parmi ces groupes il y a trois différences de la diagonale avec leurs signes, et trois avec signe contraire; de plus, deux des groupes contiennent deux différences de cette diagonale, et deux autres groupes n'en contiennent qu'une seule. Soit pris le groupe 14—13—1=0, et soit—13 à l'angle de la diagonale, et—1 au bas du groupe : il suit que les complémens seront à la 3.e ligne : car alors on aura+1 en diagonale; la 2.e ligne verticale, à partir de la droite, peut être prise parmi les groupes qui ne contiennent qu'une différence de cette dia-

gonale. Soit cette 2.e ligne 12—9=3; les complémens seront à la 4.e ligne : l'on aura ainsi —9 en diagonale. Voilà pour les verticales comprenant deux groupes et les groupes complémentaires.

Quant aux horizontales, soit choisi le groupe 11—4—7, afin d'avoir +7 en diagonale, la 2.e ligne comprenant les complémens; il faut encore —8 et —2 en diagonale. Mettant —2 à l'angle, et +8 au milieu du groupe, il viendra —8 pour la diagonale. On verra le carré par les différences (*figure* 220, *planche* XXXVII), et avec les nombres (*figure* 221). Le carré de cette dernière figure en contient trois magiques, savoir : celui de 3, celui de 4, et le carré total.

On peut varier ces combinaisons soit par les progressions des carrés partiels, soit par l'angle de diagonale du plus grand carré, soit par la combinaison des groupes : ainsi, par exemple, tout le reste ne variant pas, les groupes pourraient être, après avoir substitué 7 à 12 et 12 à 7,

13—9—4=0..... 14—12—2=0.....
11—8—3=0..... 7— 6—1=0

Le carré d'équerre peut être plus grand, et même ne laisser que deux lignes en dehors, soit en horizontale, soit en verticale. Il est clair qu'il ne peut en rester une seule, puisque le carré total serait impossible : en effet des nombres inégaux, ajoutés à des sommes égales, ne peuvent donner des résultats égaux.

Voici le carré de 7, en supposant celui d'équerre de 5 de racine.

Soit le carré de 5 composé avec les séries 3, 5, 7, 9, 11...

12, 14, 16, 18, 20... 21, 23, 25, 27, 29... 30, 32, 34, 36, 38... 39, 41, 43, 45, 47. Les différences restantes sont 1, 3, 6, 8, 10, 12, 15, 17, 19, 21, 23, 24. La 2.e diagonale, qui ne passe pas par celle du carré d'équerre, ayant déjà 3 différences +16+13+0, répondant aux nombres 9, 12, 25, il en faut encore 4, dont la somme soit —29. Qu'on prenne +21—23—19—8. On peut faire l'horizontale 21+8+17+3—24—15—10=0. Il se trouve dans cette horizontale 2 des 4 différences de la diagonale, dont l'une avec signe changé. Quant à la verticale, qu'on la construise par 23—19—24+15+12—6—1 : on voit dans cette verticale les deux autres différences de l'horizontale, dont une avec changement de signe, et deux de l'horizontale, dont une aussi avec changement de signe.

Les trois différences de l'horizontale et de la verticale, non communes à ces lignes non plus qu'à la diagonale, se placent à volonté dans les trois cases non remplies. On voit le carré des différences (*fig.* 222, *planche* XXXVII), et le carré avec les nombres (*figure* 223).

Il n'est nullement nécessaire que la partie de la diagonale comprise dans le carré d'équerre, contienne le moyen : ainsi soit, par exemple, le carré de 5 comme suit :

21	20	9	43	32
34	23	12	11	45
47	36	25	14	3
5	39	38	27	16
18	7	41	30	29

On aurait +16+2—22=—4 pour les 3 différences de 9, 23, 47, qui seraient en diagonale; on peut la compléter par 21+19—24—12.

Ainsi, diag., 21+19—24—12

Horiz., par ex., 21—19 . . +23—17—15+10—3

Vertic., 8—1 . . +24—12 . . . —10—3—6

On pourrait faire une bordure au carré de 5, formé lui-même de manière à être à équerre ou à fausse croix.

On voit aussi (*figure* 224) transformation de la figure 223 à équerre, en carré central avec bordure, et cela a lieu toutes les fois que le carré à équerre n'a que deux lignes verticales et deux horizontales; et réciproquement, l'on passe du carré à simple bordure au carré à équerre. On remarque que les angles de la bordure ne sont que les parties d'intersection, et que les nombres qui couvraient le carré d'équerre, couvrent le carré central.

Pour obtenir toutes les combinaisons de la figure 220, il faudrait faire tous les groupes possibles pour un même angle du carré d'équerre; agir de même pour un autre angle de ce carré, les 16 nombres qui le composent pouvant se présenter successivement pour angles. On ferait varier les progressions des deux carrés partiels, ayant soin de comprendre le moyen dans le carré impair.

On prouve aisément que tous les nombres d'un des carrés de 4 peuvent passer dans la même case : en effet, que l'on forme les tableaux pour un de ces carrés de 4 : on aura 4 angles, lesquels, par changement de position du carré, se présenteront pour faire partie de la diagonale. Soient ces tableaux :

1	3	2	4		0	45	45	0
4	2	3	1		40	5	5	40
4	2	3	1		5	40	40	5
1	3	2	4		45	0	0	45

Les 4 angles sont 1, 4, 46, 49.

Que la 2.e ligne horizontale du 2.e tableau soit la 1.re: la 4.e sera la 3.e, et les angles seront 6, 9, 41, 44.

Que la 2.e ligne verticale du 1.er tableau soit la 1.re : la 4.e deviendra la 3.e, et l'on aura pour les angles 2, 3, 47, 48.

Enfin, que la 2.e ligne de ce tableau soit toujours la 1.re, et la 3.e horizontale du 2.e aussi la 1.re : la 2.e sera la dernière, et les angles seront 7, 8, 42, 43.

Il faudrait donc calculer les diagonales pour tous les nombres du carré de 4 successivement, afin d'avoir toutes les combinaisons d'un même carré.

Le carré de la figure 221 peut aisément se transformer en croix à 3 bandes (*figure* 225, *planche* XXXVII). Le carré d'équerre se distribue aux angles; celui d'intersection l'est toujours dans la croix, dont il forme le milieu; le reste, provenant des groupes, conserve sa position par rapport au carré d'intersection ou au carré d'équerre. Ces groupes peuvent d'ailleurs alterner à volonté, pourvu que les groupes complémentaires soient parallèles à ceux dont ils sont les complémens.

Le carré de la figure 225 n'est autre chose qu'un carré à bordure double. Il suffit de séparer le carré d'intersection, et de supprimer les séparations aux angles. Cette bordure diffère des autres en ce que les cases d'intersec-

tion aux angles, réunies, donnent un carré. Toutes les croix dont les branches ont plus de 2 bandes, et dont le carré d'intersection sera magique, ne sont donc que des carrés à bordures multiples.

Le même carré de la figure 221 se change encore aisément en carré avec châssis à traverse. Le carré de 3 est encore aux intersections; celui de 4 donne les parties séparées par le châssis; et les nombres qui forment les groupes constituent les bandes du châssis, intersections défalquées. Voir (*figure* 227).

Quant au carré de la figure 223, on trouve (*figure* 226) qu'il est transformé en carré à châssis; mais le carré central n'est pas magique: car les angles en diagonale ne font pas un couple.

Les figures 221, 225 et 227, quoique très-peu ressemblantes, prouvent que l'on peut facilement passer de l'une à l'autre. Il convenait de rassembler ces transformations, qui ont beaucoup de rapport avec les figures de la géométrie de position. Il en est de même des figures 223, 226 et 224 : cette dernière présente bordure régulière autour du carré de 5; mais il faut prendre garde d'essayer de fausses transformations : ainsi l'on ne pourrait remplacer le carré de la figure 223, qui est à équerre, par un carré avec croix : car, puisque 5 est impair, il ne peut être divisé par une croix. Il en est de même des autres carrés.

On peut encore rassembler deux des bandes du châssis de la figure 227, comme on le voit (*figure* 228), en conservant toujours les mêmes carrés de 3 et de 4. La 1.re diagonale est exacte; mais il faudra faire attention à la 2.e; et, puisque 25 en fait partie, et que les angles ont un

couple, il faut encore 4 différences dont la somme soit=0. Soient ces différences 14—13+7—8. De plus, il faut que les 4 groupes contiennent chacun une de ces différences. On peut les former comme suit, et comme ils avaient déjà été composés ci-devant.

14—12—2....9+4—13....11—8—3....7—6—1

Deux des groupes seront placés entre les cases du carré de 4 et en horizontale; les deux autres en verticale : ainsi 11, répondant à+14, sera en diagonale; les nombres 27 et 37, correspondant à—2 et—12, seront mis à volonté dans les deux cases restantes; ensuite 38, répondant à —13, sera aussi en diagonale; et les nombres 16 et 21, qui ont pour différences +9 et+4, aux deux autres cases; il en sera de même pour les deux groupes en verticale; les complémens achèvent le carré total, qui comprend toujours les carrés de 4 et de 3, tels qu'ils étaient dans les figures 221, 225 et 227.

Voici encore une forme remarquable (*figure* 229), et qui présente une espèce de symétrie. Qu'on retienne encore les mêmes carrés de 4 et de 3, que l'on réunisse les trois bandes horizontales comme le porte la figure : on aura une espèce de faux châssis; et, puisque les angles font un couple, il ne faut plus que cinq différences à chaque diagonale; mais il y en a trois connues dans chacune, savoir : deux d'intersection, dont une commune, et une autre du carré de 4. Soient ces diagonales

$-15+\overline{17}-20$	$+14+4$	1.re diagonale.
$-\ 5+\overline{18}-20$	$+\ 8-1$	2.e diagonale.

Les trois premières sont connues; celles qui sont sur-

montées d'un trait — appartiennent au carré de 4; on remarque que, des 4 groupes à former, l'un doit renfermer une différence de chaque diagonale : ce groupe se met à la 6.e horizontale; un autre n'en doit pas renfermer : il se place à l'une des 3 horizontales restantes; quant aux groupes verticaux, chacun contient une différence de l'une des diagonales.

Soit le couple à deux différences 14—13—1;

Ceux des 3.e et 5.e verticales à une seule différence commune, 4+7—11, et 8—2—6;

Enfin le couple sans différence, 12—9—3.

Il n'y a plus de difficulté à placer les nombres correspondant à ces différences, et les complémens achèvent le carré.

En conservant toujours les mêmes carrés de 3 et de 4, voici un carré de 7 avec fausse croix (*figure* 230, *planche* XXXVIII).

La 1.re diagonale est encore exacte; la 2.e a ses angles faisant couple, et de plus 10 d'intersection, dont la différence est 15; il faut encore 4 différences, dont deux communes avec les groupes horizontaux, et deux communes avec les groupes verticaux. Soient les 4 groupes

8+6—14=0..... 12+1—13=0.....
7—4— 3=0..... 11—9— 2=0

Si donc une différence de chaque groupe ajoutée à 15 donne une somme=0, la diagonale aura lieu. Qu'elle soit 15—14+12—4—9=0. Il sera facile, en substituant les nombres aux différences et au moyen des complémens, d'obtenir le carré de la figure 230.

On voit que les constructions varient suivant la forme

que l'on veut donner au carré de 7. Ce sont les diagonales particulièrement sur lesquelles doit se porter l'attention, ainsi qu'on a dû le remarquer dans tout ce qui précède, et même dans toute la théorie des carrés magiques. C'est en effet le genre de lignes qui est le plus susceptible d'altérations, par la différence des formes d'un carré, surtout lorsque l'on arrive aux formes irrégulières. Il faudra donc, pour chaque cas, s'assurer que les diagonales peuvent être exactes, et déduire de la construction de ces lignes celle des autres, soit horizontales, soit verticales.

ARTICLE IV.

CARRÉ DE 7 AVEC BANDES DÉTACHÉES.

Comme dans le carré (*figure* 221, *planche* XXXVII), on peut aussi bien prendre le carré de 3 pour celui d'équerre, et celui de 4 pour celui d'intersection, que ce dernier pour le premier, et réciproquement; soit fait le carré de 3 par 3 bandes isolées (*planche* XXXVII *bis*, *figures a et b*), et avec les nombres de la figure 221; que le carré de 4, toujours avec les mêmes nombres, soit aux intersections.

Comme chaque diagonale aura un couple et le moyen, il ne faut plus que 4 différences: elles doivent être telles qu'un groupe en verticale en contienne deux, un des groupes en horizontale aussi deux, et les deux autres groupes aucune. Soient toujours ces groupes

14—6—8=0..... 13—12—1=0.....
7—4—3=0..... 11— 9—2=0

Que la diagonale première comprenne deux différences,

dont une avec signe changé, prises dans deux de ces groupes : elle peut être 7+4+1—12. Ces différences seront placées avec leurs complémens, comme ci-dessus; l'autre diagonale aura les mêmes différences que la première, avec tous les signes changés. L'un des carrés comprend les différences des groupes; l'autre carré contient les nombres.

On voit donc une nouvelle combinaison facile à saisir, et remarquable par sa forme : elle n'exige qu'un peu d'attention.

Si le carré de 3 est celui d'intersection, celui de 4 peut être coupé, comme on le voit (*planche* XXXVII *bis*, *figure c et d*), et l'on aura un châssis à traverse, qui laissera des bandes détachées. On conserve toujours les mêmes carrés de 3 et de 4.

On suppose, comme on l'a déjà fait, que 7 a été substitué à 12 dans le tableau des différences restantes, pour avoir 4 différences égales aux 8 autres. Les groupes seraient donc encore

7—1—6=0..... 14—12—2=0.....
11—3—8=0..... 13—9—4=0

La diagonale peut être 6—1—8+3, la diagonale ayant toujours deux différences prises dans deux des 4 groupes, dont l'une avec changement de signe.

On n'a pas répété les carrés de 3 et de 4 dans le carré des nombres substitués aux différences, pour mieux faire ressortir les groupes, leurs complémens et les diagonales. Le genre de châssis de ces figures est remarquable.

Ce même carré pourrait être coupé autrement, comme on le voit (*planche* XXXVII *bis*, *figures e et f*).

Les groupes étant les mêmes que ceux ci-dessus, on voit que la 1.re diagonale doit avoir 4 différences prises dans 2 groupes, dont une de chaque groupe avec signe contraire, puisqu'il manque 2 couples à cette diagonale. Soient donc pris 6—1+3—8 pour cette diagonale; il reste les 2 groupes 14—12—2 et 13—9—4; or la 2.e diagonale a déjà 2 couples 20 et 30..... 4 et 46; il s'y trouve encore 43, dont la différence est—18 : il faut donc que les deux différences qui manquent à cette diagonale aient pour somme +18; et ces deux différences doivent être prises dans les deux groupes restans; or 14+4 =+18 : car on peut aussi bien avoir 13—9—4 que 4+9—13, l'un est groupe complémentaire de l'autre; on fera donc aisément cette diagonale, comme on le voit à la figure. Les complémens et la substitution des nombres aux différences donneront les carrés ci-dessus. On aura donc satisfait à la formation d'un carré des plus irréguliers.

ARTICLE V.

LE CARRÉ DE 7 N'A QUE DEUX BANDES, ET CARRÉ PARTIEL DE 5.

Voici plusieurs formes qu'on peut encore donner au carré de 7, en faisant le carré partiel de 5.

D'abord, avec fausse croix (*figur.* 231, *pl.* XXXVIII), on a choisi, pour le carré de 5, les progressions 7·8·9·10·11..... 15·16·17·18·19..... 23·24·25, et complémens; les différences restantes sont 3, 4, 5, 11, 12, 13, 19, 20, 21, 22, 23, 24, en plus et en moins. Après avoir construit le carré de 5 par la méthode expéditive, la 1.re

diagonale comprendra le moyen, plus un couple, 32, 18; enfin 39, dont la différence est —14: il faut donc encore 3 différences, dont la somme =+14; soit cette diagonale 24+13—23—14. La seconde a déjà un couple 27, 23; elle a de plus 26, dont la différence est—1; enfin elle doit avoir une différence commune avec la première : qu'elle soit donc —1—23—19+21+22.

La 1.re horizontale aura d'abord le complément de la différence commune aux 2 diagonales, ou+23, et de plus une différence de chacune de ces diagonales: qu'on la fasse +23+13—19+3—11—5—4.

La verticale aura d'abord une différence commune avec la 1.re diagonale : c'est celle non encore employée, ou+24; ensuite la différence commune à cette diagonale et à l'horizontale, avec changement de signe, ou — 13; de plus 2 différences communes avec la 2.e diagonale, dont une avec changement de signe; elles peuvent être 22—21 : ce sont celles non employées de cette 2.e diagonale; on aura donc déjà +24+22—21—13=12. Il faudra qu'avec les deux différences qui n'ont pas fait partie des diagonales ni de la verticale, et qui sont 20 et 12, plus avec une autre commune avec l'horizontale, on puisse obtenir—12; or —20+12—4=—12 : ainsi la verticale serait 24+22—21 —13—20—4+12. Voici comment il faudrait arranger ces différences, avant de les distribuer dans le carré :

1re diag. (—14)—23+24+13
2.e diag. (— 1)—23 . . —19+21+22
Horizont. +23 . +13—19 . . +3—11—5—4
Verticale. +24—13 . —21+22 . . . —4—20+12

Substituant les nombres, on aura :

1.re diagonale.	48	1	12									
2.e diagonale.	48	.	.	44	4	3						
Horizontale.	2	.	12	44	.	.	22	36	30	29		
Verticale.	.	1	38	.	46	3	.	.	.	29	45	13

Il n'y aura plus de difficulté à placer les nombres et les complémens. On fera attention que le complément 21 de 29, doit être placé diagonalement par rapport à 29.

Autre forme avec le même carré de 5 (*figures* 232, 233, *planche* XXXVIII).

Si l'on met en évidence les différences des nombres du carré de 5 qui sont placés diagonalement, la 1.re diagonale aura 10 — 9 + 17 = 18. On peut l'achever par 23 + 5 — 24 — 22. La 2.e diagonale, ayant 10+9+8=27, doit encore se composer de deux différences de la première, avec signe changé ; ce sont celles des angles ; on les a supposées — 23 — 5, et on l'a achevée par 20 — 19 : elle est donc — 23 — 5 + 20 — 19 (+27).

L'horizontale supérieure doit avoir les deux différences angulaires des 2 diagonales, et cinq autres différences : elle peut donc être 23—5+21—11—12—13—3.

Quant à la verticale, elle aura deux différences communes avec la 1.re diagonale, dont une avec changement de signe : elles sont 24 et 22 ; plus deux différences de la 2.e diagonale, dont une avec changement de signe : elles sont 20 et 19 ; enfin deux communes avec l'horizontale, dont une aussi avec changement de signe ; et, comme la différence 4 n'est pas employée, elle doit faire partie de la verticale : il ne s'agit donc que de savoir si la verticale

peut se former en faisant varier l'une des deux différences —24—22; plus l'une des deux +20—19; ensuite l'une des cinq +21—11—12—13—3, de manière à avoir, en ajoutant ±4, une somme = 0. Or on peut avoir pour cette verticale 24—22—20—19+21+12+4=0. Mettant ces lignes en ordre, on aura :

1re diag.	+23	+5	—24	—22											
2.e diag.	—23	—5	.	.	+20	—19									
Horizon.	23	—5	.	.	.	.	+21	—11	—12	—13	—3				
Verticale.	.	.	+24	—22	—20	—19	+21	.	+12	.	.	+4			

Et en nombres

1.re diagon.	2	20	49	47										
2.e diagon.	48	30	.	.	5	44								
Horizontale.	2	30	.	.	.	.	4	36	37	38	28			
Verticale.	.	.	1	47	45	44	4	.	13	.	.	21		

Encore une autre forme (*figures* 234, 235, *planche* XXXVIII).

Le carré de 5 est coupé autrement que dans les figures précédentes. On voit que la 1.re diagonale comprend un couple +17—17, différences de 8 et 42; la seconde a également un couple +8—8, différences de 17 et 33. Ainsi chaque diagonale exige encore quatre différences, indépendamment de celle du carré de 5, qui fait partie de ces diagonales, et qui est —9 pour la première et +9 pour la seconde; mais de ces quatre différences il y en a trois communes, savoir : une avec son signe; c'est celle d'intersection des diagonales, et deux avec changement de signe : ce sont celles des angles. Soient ces diagonales :

1.re (—9)+22—21+19—11

2.e (+9)+20—21—19+11

La verticale doit avoir une différence commune avec chacune des diagonales, et de plus celle de l'intersection de ces lignes, avec changement de signe : de sorte que 22+20+21 font nécessairement partie de la verticale, qu'on peut achever par—24—23—12—4. Elle sera donc 22+21+20—24—23—12—4.

Quant à l'horizontale, elle a déjà 19+11 aux angles; elle doit avoir de plus deux différences de la verticale, dont une avec changement de signe. Il s'agit de reconnaître si, avec les trois différences restantes 3, 5, 13, on peut former cette horizontale : ce qui peut se faire par 19+11—23 +4—3—13+5.

Voici ces lignes d'après leurs différences :

1.re diag. (—9)+22—21+19—11
2.e diag. (+9) . —21—19+11+20
Verticale. +22+21 . . +20—24—23—12—4
Horizontale. . . +19+11 . . —23 . +4+5—3—13

On aura, en substituant les nombres,

1.re diagonale. 3 46 6 36
2.e diagonale. . 46 44 14 5
Verticale. 3 4 . . 5 49 48 37 29
Horizontale. . . 6 14 . . 48 . 21 20 28 38

Autre forme en conservant toujours le même carré de 5 (*figures* 236, 237). On aura un faux châssis.

La 1.re diagonale n'a qu'un couple —7+7, différences de 32, 18, plus le nombre 11, auquel répond la différence

+14. La 2.e diagonale a aussi un couple —2+2, différences des nombres 27, 23; elle a de plus les nombres 26, 34, auxquels répondent les différences —1—9, dont la somme est —10. Il faut encore quatre différences à la 1.re diagonale, dont la somme doit être —14; et trois différences à la 2.e diagonale, parmi lesquelles il y en aura une commune avec la première. Leur somme doit être +10. Ces lignes peuvent être, savoir :

1.re diagonale. (+14) +23—19—13—5

2.e diagonale. (—10) +23—24+11

L'horizontale doit avoir deux différences communes avec la 1.re diagonale, dont une avec signe changé; il en est de même avec la 2.e diagonale. Soit cette horizontale —19 +13+24+11—22—4—3. Il est clair que 23 n'en peut faire partie : car c'est le centre du carré total, et l'horizontale ne passe pas par le centre.

La verticale aura une différence commune avec la 1.re diagonale : elle est 23, qui se trouve à l'intersection des 2 diagonales; la verticale aura de plus une autre différence de cette 1.re diagonale avec signe contraire : elle ne peut être que +5, puisque —5 est la seule qui reste. Il y aura encore une différence de la 2.e diagonale, avec signe contraire; cette différence est celle d'intersection de l'horizontale avec la 2.e diagonale : elle sera donc —11; enfin il faut encore une différence commune avec l'horizontale. Or 23+5—11=17 : donc les trois différences restantes, 12, 20, 21, et une de l'horizontale, doivent donner —17, et on peut avoir la verticale 23+5—11—21—12+20—4.

Il est bon d'arranger ces lignes comme on l'a fait déjà

plusieurs fois, afin d'éviter tout embarras dans le placement des nombres.

1.re diagonale. +23—19—13—5 . . .
2.e diagonale. +23 . . .—24+11
Horizontale. .—19+13 .+24+11—22—4—3
Verticale. +23 . .+5 .—11 .—4 .—21—12+20

Substituant les nombres, on aura:

1.re diagonale. 2 44 38 30
2.e diagonale. 2 . . . 49 14
Horizontale. . 44 12 . 1 14 47 29 28
Verticale. 2 . . 20 . 36 . 29 . 46 37 5

On verra (*planche* XXXVII *bis*, *figures g et h*) deux formes qui rentrent l'une dans l'autre : car les diagonales ont l'une et l'autre un couple et demi dans le carré de 5, et il y a symétrie : aussi la construction de l'une des formes entraîne celle de l'autre, comme on le voit dans les deux carrés de différences ci-dessous; on conserve toujours le même carré de 5.

Si la verticale est 22—21—20+16—13+12+4, l'horizontale doit avoir deux différences communes, dont une avec changement de signe : on l'a faite 21—20—6—1—2+3+5.

La 1.re diagonale doit avoir deux différences, dont une avec signe changé, tant de la verticale que de l'horizontale : qu'elle soit 22—16—5—1. La 2.e diagonale n'est que la 1.re, dont tous les signes sont changés.

Vertic. 22—21—20+16—13+12+4
Horizont. . +21—20 . . . .—6—1—2+3+5
1.re diag. 22 . .—16 . . . —1 . .—5

Il est inutile d'aller plus loin : on voit assez, par tous les exemples donnés, ce qu'il y aurait à faire si l'on voulait obtenir d'autres formes. On s'appesantira encore sur quelques carrés, afin de faire disparaître tout embarras et toute difficulté : car ce genre de carré exige plus d'attention que les autres; mais, avant d'aller plus loin, on ne peut résister au désir de donner encore une des formes nombreuses dont est susceptible le carré de 7. Le faux châssis qui caractérise cette forme est remarquable en ce qu'une seule bande partage le carré de 5 verticalement. (*Planche* XXXVII *bis, figure i.*)

On voit que la 1.re diagonale a déjà un couple, 11, 39, dont les différences sont +14—14, et de plus la différence —7. La 2.e diagonale ayant les nombres 31, 34, 23, dont les différences sont —6—9+2, la somme de ces dernières est =—13.

Soit faite l'horizontale 24+23—20—21—22+13+3.

La verticale doit avoir deux différences communes avec l'horizontale, dont une avec signe changé : ce sont les différences d'intersection ; soient ces différences choisies 24—3 : cette verticale aura encore les cinq différences restantes, et sera par conséquent 24—3—5—19—12 +4+11.

La 1.re diagonale doit avoir deux différences communes avec l'horizontale, et autant de la verticale; l'une des deux différences de chaque ligne avec changement de signe, et de manière que leur somme soit=7. Qu'on prenne, par exemple, 5+4+20—22.

La 2.e diagonale doit avoir quatre différences, dont une commune avec la 1.re et avec la verticale : c'est + 4, in-

tersection des deux diagonales; et, comme elle a déjà—13, il faudra donc faire 9 avec une différence de la verticale, dont le signe sera changé, et avec deux de l'horizontale, dont une avec changement de signe. Or il reste en horizontale les différences libres+23—21+13. Les différences de ces différences sont 44, 10, 34 : il faut donc voir si l'une de ces dernières, avec le signe ±, ajoutée à+9, donnera une somme égale à l'une des différences restantes de la verticale, avec son signe changé. Elles sont, signe changé, +19+12—11. Or 10+9=19 : ainsi cette 2.e diagonale est possible, et deviendra 4+19—23+13. Ces lignes peuvent se disposer comme suit :

Horizontale. +24+23—20—21—22+13+3

Verticale. +24 . . . . . —3—5—19—12+4+11

1.re diagonale. . . +20 . —22 . . +5 . . +4

2.e diagonale. . —23 . . . +13 . . +19 . +4

Et en substituant les nombres,

Horizontale. 1 2 45 46 47 12 22

Verticale. 1 . . . . . 28 30 44 37 21 14

1.re diagonale. . . 5 . 47 . . 20 . . 21

2.e diagonale. . 48 . . . 12 . . 6 . 21

Ce carré complet, avec les nombres, se trouve (*planche* XXXVII *bis*, *figure k.*)

ARTICLE VI.

CARRÉ DE 6 AVEC DIVERSES TRANSFORMATIONS.

On va d'abord former le carré de 6 avec les différences (*figure* 238, *planche* XXXVIII) : pour cela soit construite une diagonale, et qu'elle soit, par exemple,

1 h. 2 h. 3 h. 3 h. c. 2 h. c. 1 h. c.
+13,5+12,5+5,5—11,5—10,5—9,5.

On fera trois horizontales dans chacune desquelles on fera entrer une différence de la diagonale avec son signe, et une autre avec changement de signe. La 2.e diagonale est composée des complémens de la 1.re. Les verticales auront les différences aux cases correspondantes, ce qu'on obtient en mettant par ordre, dans les trois autres horizontales, les complémens des trois premières, comme le marque la figure 238. Soient donc les trois premières horizontales

1.re horizontale. 13,5+ 9,5—17,5—16,5+15,5—4,5
2.e horizontale. 12,5+10,5—14,5— 7,5— 3,5+2,5
3.e horizontale. 11,5+ 5,5— 8,5— 6,5— 1,5—0,5

Les nombres correspondans donnent le carré (*figure* 239, *planche* XXXVIII).

Il y a grand nombre d'autres combinaisons pour faire la diagonale, et par conséquent pour avoir le carré de 6.

Quoique le carré de la figure 239 soit simple, voyons les tableaux dont il serait le résultat :

1.er TABLEAU.

5	6	5	5	3	3
3	6	2	4	2	4
1	3	1	1	2	1
6	4	6	6	5	6
4	1	5	3	5	3
2	1	2	2	4	4

2.e TABLEAU.

0	30	30	18	0	6
30	0	24	18	6	12
24	24	12	6	18	18
6	6	18	24	12	12
0	30	6	12	24	18
30	0	0	12	30	24

Il est bien impossible de prévoir de semblables tableaux : le second n'est pas le premier renversé ; ce premier, qui devrait avoir 21 à chaque ligne, ou un multiple de 6 en

plus ou en moins, a pour somme tantôt 27, tantôt 21, 9, et leurs complémens 33, 21, 15. Le 2.e tableau porte à chaque ligne les complémens à 111 de celles du 1.er tableau. On voit par cet exemple combien est circonscrite la méthode de La Hire. Il faut donc s'astreindre à employer plus particulièrement celle des différences, surtout pour les carrés pairs dont la racine ne se divise que par 2 : car ce sont les plus difficiles à former.

Voici les tableaux pour la méthode ordinaire, le carré résultant, et celui des différences.

1	5	4	3	2	6
6	5	3	4	2	1
6	2	3	4	5	1
1	2	3	4	5	6
6	5	4	3	2	1
1	2	4	3	5	6

24	6	6	24	6	24
30	30	0	0	30	0
12	18	18	18	12	12
18	12	12	12	18	18
0	0	30	30	0	30
6	24	24	6	24	6

25	11	10	27	8	30
36	35	3	4	32	1
18	20	21	22	17	13
19	14	15	16	23	24
6	5	34	33	2	31
7	26	28	9	29	12

— 6,5	+ 7,5	+ 8,5	— 8,5	+ 10,5	— 11,5
— 17,5	— 16,5	+ 15,5	+ 14,5	— 13,5	+ 17,5
+ 0,5	— 1,5	— 2,5	— 3,5	+ 1,5	+ 5,5
— 0,5	+ 4,5	+ 3,5	+ 2,5	— 4,5	— 5,5
+ 12,5	+ 13,5	— 15,5	— 14,5	+ 16,5	— 12,5
+ 11,5	— 7,5	— 9,5	+ 9,5	— 10,5	+ 6,5

On voit encore ici symétrie dans le carré des différences, mais différente de celle de la première formation. Les diagonales sont composées de nombres avec leurs complémens par ordre. Les 2.e et 5.e verticales ont leurs extrémités complémens l'une de l'autre; les première et dernière horizontales ont leurs complémens au milieu de ces lignes. Les 2.e et 5.e horizontales ont de même leurs com-

plémens aux extrémités : les nombres du milieu les ont verticalement. Les 3.e et 4.e horizontales ont leurs extrémités complémens en verticale ; et les 2.e et 5.e différences complémens. On verra mieux les analogies en détaillant ce carré de différences comme suit :

— 6,5	+ 7,5	+ 8,5	— 8,5	+ 10,5	— 11,5
.	— 16,5	.	.	— 13,5	.
+ 0,5	.	— 2,5	— 3,5	.	+ 5,5
— 0,5	.	+ 3,5	+ 2,5	.	— 5,5
.	+ 13,5	.	.	+ 16,5	.
+ 11,5	— 7,5	— 9,5	+ 9,5	— 10,5	+ 6,5

.	+ 7,5	.	.	+ 10,5	.
— 17,5	.	+ 15,5	+ 14,5 +	.	+ 17,5
.	— 1,5	.	.	+ 1,5	.
.	+ 4,5	.	.	— 4,5	.
+ 12,5	.	— 15,5	— 14,5	.	— 12,5
.	— 7,5	.	.	— 10,5	.

Venant au carré d'équerre, on a fait celui de 4 avec les 8 premiers et les 8 derniers nombres ; les différences restantes sont de 0,5 à 9,5 (*figur.* 240, 241, *pl.* XXXVIII). La 1.re diagonale, passant par celle du carré de 4, ne doit plus avoir qu'une différence et son complément ; quant à la seconde, elle a déjà 34 et 29, dont les différences sont —15,5 — 10,5 = — 26. L'horizontale aura la différence choisie de la 1.re diagonale, et deux de la seconde, dont une avec changement de signe. La verticale aura encore celle de la 1.re diagonale, et deux autres de la 2.e diagonale, dont une avec changement de signe ; et de plus une

de l'horizontale, dont le signe sera changé. Soient ces lignes :

1.re diagon.	+9,5	—9,5										
2.e diagon.	.	.	+8,5	+7,5	+5,5	+4,5						
Horizontale.	+9,5	.	—8,5	.	.	+4,5	—6,5	+1,5	—0,5			
Verticale.	+9,5	.	.	—7,5	+5,5	.	.	—1,5	.	—3,5	—2,5	

Et en nombres,

1.re diagonale.	9	28								
2.e diagonale.	.	.	10	11	13	14				
Horizontale.	9	.	27	.	.	14	25	17	19	
Verticale.	9	.	.	26	13	.	.	20	.	22 21

Il est maintenant facile de placer les nombres : car 9 sera à l'angle de la 1.re diagonale, de l'horizontale et de la verticale; par conséquent son complément 28 sera le 2.e nombre de la diagonale. Ensuite 10 et son complément 27 seront l'un sous l'autre, de manière que 10 fasse partie de la 2.e diagonale, et 27 de l'horizontale; 14 est à l'angle de cette diagonale et de l'horizontale : 17 et son complément 20 sont placés, savoir : 17 à l'horizontale, et 20 diagonalement en verticale; 25 et 19 de l'horizontale à volonté, dans les deux cases restantes, ainsi que 21 et 22 à la verticale ; 13 sera à l'autre angle de la 2.e diagonale; enfin 11, à la case restante de la 2.e diagonale, aura son complément 26 en verticale.

On voit (*figure* 242) le carré de 6 avec bordure tirée de la figure à équerre 241. Les quatre cases des angles sont celles d'intersection de la figure 241; la 2.e diagonale paraît confondue dans la bordure, mais les nombres qui la com-

posaient couvrent toujours les mêmes lignes du carré central de 4.

La figure à châssis (*figure* 243) se tire des précédentes; les intersections sont les mêmes, et les nombres du châssis couvrent les mêmes lignes.

Une autre forme régulière (*figures* 244, 245) présente les deux diagonales ayant chacune un couple, et complémens l'une de l'autre, pour les quatre différences qui leur manquent. L'horizontale en aura deux communes avec la 1.re diagonale, dont une avec changement de signe. La verticale aura les deux autres, dont une avec changement de signe, plus deux différences de l'horizontale, dont une aussi avec signe changé. Ces lignes peuvent donc être :

1.re diag. +8,5+3,5—7,5—4,5
Horizont. —8,5 . . —4,5+9,5+6,5—5,5+2,5
Verticale. +3,5+7,5 . . —6,5—5,5 . +1,5—0,5

Et substituant les nombres aux différences :

1.re diagonale. 10 15 26 23
Horizontale. 27 . . 23 9 12 24 16
Verticale. . 15 11 . . 25 21 . 20 19

On aura (*figures* 246, 247) une espèce de double croix. Chaque diagonale a un couple dans le carré de 4, et elles sont encore complémens l'une de l'autre pour les quatre différences qui doivent les compléter : l'horizontale a deux différences de la diagonale, l'une changeant son signe; la verticale aura les deux autres aussi avec un changement

de signe, plus deux différences de l'horizontale, toujours avec un changement de signe. On pourra faire ces lignes, savoir :

1.re diag. 9,5+6,5—7,5—8,5
Horiz. 9,5—6,5 . . —4,5+5,5—2,5—1,5
Vertic. . . +7,5—8,5—4,5 . +2,5 . +3,5—0,5

Il y a encore espèce de symétrie (*figures* 248, 249), mais les diagonales, outre un couple à chacune, ont encore une différence fixe, savoir : + 12,5, différence de 6, pour la première ; et — 11,5, différence de 30, pour la seconde. Ces lignes, ainsi que l'horizontale et la verticale, ont été formées comme suit :

1.re diag. (+12,5)+5,5—9,5—8,5
2.e diag. (—11,5) . . +8,5+7,5—4,5
Horizont. +9,5—8,5+7,5 . —6,5—3,5+1,5
Verticale. +5,5+9,5 . —7,5—4,5 . . . —2,5—0,5

Substituant les nombres, on aurait :

1.re diagonale. 13 28 27
2.e diagonale. . . 10 11 23
Horizontale. . . 9 27 11 . 25 22 17
Verticale. . . 13 9 . 26 23. . . . 21 19

(*Figures* 250, 251, *planche* XXXIX.) On verra encore ici espèce de symétrie, en retournant les figures. La 1.re diagonale a déjà les différences fixes — 12,5 + 15,5 = + 3 ; et la seconde des différences — 16,5 + 11,5 = — 5. Les lignes ont été construites par les différences, comme suit :

1.re diag. (+3)—8,5+9,5+2,5—6,5

2.e diag. (—5)+8,5 . . +6,5—4,5—5,5

Horizont. —8,5 . . +6,5 . . +7,5—0,5—3,5—1,5

Vertic. +9,5—2,5 . —4,5+5,5—7,5—0,5

Et avec les nombres substitués aux différences :

1.re diagonale. 27 9 16 25

2.e diagonale. 10 . . 12 23 24

Horizontale. 27 . . 12 . . 11 19 22 20

Verticale. . 9 21 . 23 13 26 19

Il y a à faire ici une remarque importante.

Que l'on renverse le carré de la figure 250, et que l'on conserve toujours le carré de 4 de la figure 240, en le retournant comme on voit (*planche* XXXVII *bis*, *figure l*).

La 1.re diagonale aurait eu 12,5 et 10,5 du carré central, différences de 6 et 8; la 2.e diagonale aurait eu de même 11,5 et 13,5=25 par les différences de 7 et 5. Celle-ci aurait pu se compléter par —8,5—6,5—5,5—4,5; mais comme la première et la dernière horizontale doivent avoir à leurs extrémités les différences, complémens l'une de l'autre, pour que le carré total soit magique, il stiit que la 1.re diagonale aurait deux différences de la seconde, avec changement de signe pour l'une et l'autre. Elles ne seront donc pas moindres que 5,5+4,5=10; et, comme la 1.re diagonale a déjà 12,5+10,5=23, elle n'aurait pas moins de 10+29=33; il lui faut encore deux différences, dont la somme ne peut être 33. Ainsi cette 1.re diagonale est impossible : d'où il suit qu'en conservant le même carré central ou de coupures, sa position particulière rend possible ou impossible la formation du carré total. On reconnait au reste facilement les signes d'impossibilité.

Ce qu'on vient de dire n'est plus applicable au cas où le carré de coupures serait comme il est supposé à la figure 250 : car le quart de conversion de la figure ne peut rendre impossible ce qui était possible avant la conversion, toutes choses étant d'ailleurs dans le même état; il faut que le carré de coupures éprouve un changement.

En faisant faire un quart de révolution au carré de coupures de la figure 240, on obtient encore une autre forme (*figures* 252, 253, *planche* XXXIX). La première diagonale ayant dans le carré 5 et 1, dont les différences sont + 13,5 + 17,5 = 31, et la seconde 33, dont la différence est — 14,5, indépendamment d'un couple 7, 30. On pourra établir les lignes comme suit :

1.re diag. (+31)—9,5—8,5—7,5—5,5
2.e diag. (—14) . . . . +6,5+4,5+3,5
Horizont. —9,5+8,5 . . —6,5+4,5 . +2,5+0,5
Vertic. . . —7,5+5,5+6,5 . —3,5 . +0,5—1,5

Et en substituant les nombres :

1.re diagonale. 28 27 26 24
2.e diagonale. 12 14 15
Horizontale. 28 10 . . 25 14 . 16 18
Verticale. . . 26 13 12 . 22 . 18 20

En conservant le carré de la figure 240, on voit que les diagonales ont chacune un couple dans le carré de coupures (*figures* 254, 255, *planche* XXXIX); les lignes sont faciles à construire, l'une des diagonales étant, par symétrie, complément de l'autre.

1.re diag. +8,5+5,5—7,5—6,5

Horizont. +8,5 . . +6,5—9,5—4,5—3,5+2,5

Verticale. +5,5+7,5 . —9,5 . . —2,5+0,5—1,5

Et en nombres, au lieu des différences :

1.re diagonale. 10+13 26 25

Horizontale. 10 . . 12 28 23 22 16

Verticale. . 13 11 . 28 . . 21 18 20

On trouve (*figures* 256, 257, *planche* XXXIX) une autre forme qui exige pour le carré de coupures une autre construction, mais toujours avec les mêmes nombres (*figure* 256).

La première diagonale ayant 35 et 3 dans ce carré, leurs différences — 16,5+15,5 ont pour somme — 1 ; la seconde ayant 34 et 2, leurs différences — 15,5+16,5 ont leur somme = + 1. Il sera donc possible de construire les lignes comme suit :

1.re diagonale. (—1)+9,5+5,5—6,5—7,5

2.e diagonale. (+1)—9,5 . . +7,5+2,5—1,5

Horizontale. . . —5,5—6,5 . +2,5+1,5+8,5—0,5

Verticale. +9,5 . . +7,5 . . —8,5—0,5—4,5—3,5

Substituant les nombres aux différences, ces lignes seront :

1.re diagonale. 9 13 25 26

2.e diagonale. 28 . . 11 16 20

Horizontale. . 24 25 . 16 17 10 19

Verticale. 9 . . 11 . . 27 19 23 22

On aura (*figures* 258, 259, *planche* XXXIX) le même

carré de coupures que ci-dessus. La première diagonale retient déjà, du carré de coupures, 35, 8, 30, dont les différences sont —16,5+10,5—11,5, dont la somme=—17,5; la seconde diagonale comprend aussi, de ce carré, les nombres 2, 29, 7, dont les différences +16,5 — 10,5 +11,5 = + 17,5. Les lignes pourront être construites par les différences, savoir :

1.re diag. (—17,5)+7,5+6,5—8,5
2.e diag. (+17,5)—7,5 . . —5,5—4,5
Horizon. . +6,5—8,5—5,5+4,5—2,5+0,5
Verticale. +7,5 . —3,5 . —4,5 . . —9,5+8,5+1,5

Et par les nombres :

1.re diagonale. 11 12 15
2.e diagonale. 26 . . 24 23
Horizontale. . 12 22 24 14 21 18
Verticale. 11 . 22 . 23 . . 28 10 17

Il y a beaucoup d'autres formes dont il est inutile de s'occuper; ce qui précède est bien suffisant pour guider dans tous les cas. Cependant on ne peut passer sous silence la suivante (*planche* XXXVII *bis*, *figures m* et *n*), qui offre plus de difficulté.

On conserve le carré de la figure précédente.

La première diagonale a —13,5 pour somme des 3 différences fixes — 16,5 — 14,5 + 17,5. La seconde a +13,5; il faut encore 3 différences à chacune, et l'une de ces différences est complément de l'une des 3 de l'autre diagonale. Soit la première (—13,5) + 9,5 + 5,5—1,5, et l'autre (+13,5)—9,5—7,5 + 3,5 : l'horizontale aura d'abord les deux différences de chaque diagonale, qui

ne sont pas communes entre ces deux lignes, et l'une des différences changera son signe. Soit cette horizontale + 5,5 + 1,5 — 7,5 — 3,5 — 2,5 + 6,5 : la verticale doit d'abord avoir une différence commune avec la 1.re diagonale et l'horizontale : il n'y a que + 5,5 qui convienne. Elle en aura une autre commune avec la 2.e diagonale, mais avec signe changé : c'est + 7,5. Cette différence est aussi commune avec la ligne horizontale ; et enfin une autre aussi commune à la 2.e diagonale, et avec son signe : elle est également commune avec la 1.re diagonale, en changeant de signe ; c'est donc — 9,5. Ainsi elle contient déjà + 5,5 + 7,5 — 9,5 = 3,5. Il reste les 3 différences 8,5, 4,5, 0,5. Il faut obtenir — 3,5 avec ces 3 différences : or 4,5 + 0,5 — 8,5 = — 3,5. Donc le carré est possible. Ordonnant ces lignes, on aura :

1.re diagon. +9,5+5,5—1,5
2.e diagon. —9,5 . . —7,5+3,5
Horizontale. . +5,5+1,5—7,5—3,5—2,5+6,5
Verticale. —9,5+5,5 . +7,5 . . . —8,5+4,5+0,5

Et par les nombres substitués aux différences :

1.re diagon. 9 13 20
2.e diagon. 28 . . 26 15
Horizontale. . 13 17 26 22 21 12
Verticale. 28 13 . 11 . . . 27 14 18

On n'est pas assuré de procéder convenablement à la formation des diagonales, et par suite à celle des autres lignes. Lorsqu'on ne peut réussir avec le carré de 4, tel qu'il est construit, on le forme autrement, ou on lui fait subir une conversion ; on choisit d'autres nombres pour les diagonales ; enfin on change quelque chose à l'horizon-

tale, jusqu'à ce que la verticale soit possible. On aperçoit facilement et promptement les signes d'impossibilité.

On terminera ici les transformations du carré de 6; on peut les varier d'une foule de manières. On trace le carré à volonté, et, avant de le remplir, on examine quelles sont les différences communes entre telle ou telle ligne, et l'on fait les suppositions que l'on veut pour construire les lignes. Si les conditions ne sont pas remplies par ces suppositions, on en fait d'autres, ou l'on opère quelque changement dans le carré de coupures, comme on l'a dit plus haut.

ARTICLE VII.

CARRÉ DE 8 AVEC TRANSFORMATIONS.

Soit fait d'abord un châssis à traverses (*figure* 262, *planche* XXXIX) au moyen des différences. Qu'on prenne pour le carré de coupures (c'est celui qui se compose des parties isolées de la figure) les 8 premiers et les 8 derniers nombres; soient choisis pour le carré d'intersection (c'est celui qui se compose des cases d'intersection des horizontales et des verticales) les 8 suivans et les 8 précédens nombres. Ces deux carrés seront formés à l'ordinaire. Il résulte que les diagonales se trouveront construites : car elles se composent des diagonales des deux carrés ci-dessus. Il ne faut plus que 4 différences pour compléter les horizontales et les verticales.

Chaque nombre vaut $\frac{64+1}{2} = 32,5$. Le premier des nombres restans est 17 : sa différence sera donc $32,5 - 17 = 15,5$. Ainsi, pour obtenir les verticales et les horizon-

tales, on aura les 16 différences de 0,5 à 15,5, et il n'y aura plus de différences communes entre ces lignes. Il faut donc faire 4 groupes de 4 différences; deux seront en horizontale, et deux en verticale; les groupes complémentaires achèveront le carré.

Soient ces groupes

12,5 — 13,5 + 5,5 — 4,5
14,5 + 11,5 — 15,5 — 10,5
8,5 + 7,5 — 9,5 — 6,5
3,5 — 1,5 — 2,5 + 0,5

On place à fantaisie et où l'on veut ces groupes, pourvu qu'il n'y en ait que 2 en horizontale, et 2 en verticale.

Substituant les nombres aux différences, ces groupes seront

20 46 27 37.... 18 21 48 43..... 24 25 42 39.....
29 34 35 32.

Dans ce genre de carrés on pourrait placer autrement les groupes : on en mettrait deux dans les intervalles entre les cases du carré de coupures, et horizontalement; on mettrait les deux autres dans les mêmes intervalles, et verticalement, comme on voit (*planche* XXXVII *bis*, *figure o*); les complémens achèveront le carré.

On voit (*figure* 263) le carré de la *figure* 262, avec les nombres au lieu des différences.

Examinant la figure 263, on remarque que 29 + 31 = 60, plus petit de 5 qu'un couple; mais 48+22=70, plus grand de 5 qu'un couple: d'où il suit que la figure 263 se change sur le champ dans la figure 264. On voit que le carré de coupures se compose de deux bandes

isolées et symétriquement disposées. Le carré d'intersection reste encore divisé aux intersections, et dans le même ordre. Il en est de même des nombres entre les carrés de coupures. Les diagonales ont déjà deux couples, 9, 56 et 60, 5 pour l'une; 12, 53 et 57, 8 pour l'autre. Celle-ci a en outre 36+43+17+34=130=2 couples.

Le carré (*figure* 265) est le même que celui de la *figure* 264; mais les groupes ont été inutiles. On a fait des carrés pour les horizontales et pour les verticales par la manière expéditive, comme on l'avait pratiqué pour le carré d'intersection et pour celui de coupures: d'où il suit que le carré de la figure 265 comprend réellement cinq carrés : celui de coupures, consistant dans les deux bandes réunies; celui d'intersection, distribué aux angles et au milieu des verticales; celui des verticales, distribué au dessus et au milieu des bandes; enfin celui des horizontales, distribué à côté des bandes. On a supprimé ceux de coupures et d'intersection. Il faut ajouter le carré total. Cette forme est gracieuse, et la plus facile à construire.

Le carré (*figure* 266) formé par la réunion des quatre nombres aux quatre angles, et celui d'intersection, seront où l'on voudra; ceux des horizontales ou verticales se tirent aussi de la figure 265 : on peut même changer l'un dans l'autre les quatre carrés partiels; et, comme la somme des nombres de chaque ligne de ces carrés est la même, puisque chacun est composé de nombres et de leurs com-

plémens, on peut avoir carré à compartiment; mais on ne tirerait pas carré à compartiment de la figure 264 : car les diagonales des carrés des horizontales et verticales n'ont pas 130 pour somme.

L'équerre du carré de 8 à 16 cases n'est que l'un des carrés de 8 à compartimens.

On verra (*figure* 267, *planche* XXXIX) une nouvelle distribution du carré central ou à coupures : c'est encore un résultat de la composition des quatre carrés partiels.

Il en est de même du carré (*figure* 268, *planche* XL). On peut, dans toutes les figures régulières ou symétriques, changer les carrés l'un dans l'autre. C'est ce qu'on a vu depuis la figure 265.

Il n'en est pas de même pour les carrés (*figures* 269 *et* 270, *planche* XL) : car le carré de coupures réuni est lui-même coupé par les diagonales, de manière que les cases qui en font partie ne comprennent pas un couple. Le carré d'horizontales aussi réuni ne donne point de couple pour les parties de diagonale qu'il contient : d'où la conséquence qu'il y a des différences forcées. Celles de la 1.re diagonale sont $24{,}5+29{,}5-5{,}5-0{,}5=48$; la seconde a déjà $27{,}5+30{,}5-6{,}5-3{,}5=48$. Le carré de coupures est fait avec les 8 premiers et les 8 derniers nombres, celui des horizontales avec les 16 nombres du milieu, et par la méthode expéditive l'un et l'autre. Les différences restantes sont celles de 9 à 24, et par conséquent de 8,5 à 23,5; et,

comme il faut pour chaque diagonale — 24, on peut les former par

1.re diagonale. —10,5—11,5—12,5—13,5
2.e diagonale. — 8,5— 9,5—14,5—15,5

Les deux premières verticales doivent avoir deux différences de chaque diagonale, dont une avec signe changé : il ne faudra donc plus que quatre différences pour les compléter.

On peut les composer comme suit :

1.re verticale. (—11,5+13,5+9,5—14,5) +22,5+21,5—23,5—17,5
2.e verticale. (—10,5+12,5+8,5—15,5) +19,5+20,5—18,5—16,5

Si l'on met les complémens de la 1.re verticale à la 3.e, et ceux de la 2.e à la 4.e, on aura le carré des différences (*figure* 269), et l'on verra le carré des nombres (*figure* 270); il n'y aura que trois carrés magiques, savoir : celui de coupures, celui des horizontales, et le carré total.

Dans le carré (*figure* 271) on a encore + 48 à chaque diagonale tant au carré de coupures qu'à celui des horizontales : il suffira donc de faire les verticales comme à la figure 269, ou plutôt 270, en substituant les nombres : car les 8 horizontales qui composent ces deux carrés sont magiques 4 par 4 ; on voit donc que les carrés (*figures* 269 *et* 271) se changent l'un dans l'autre, malgré la différence des formes.

Les diagonales (*figures* 272 *et* 273) ont bien des différences forcées; mais leur somme n'est pas la même. La 1.re diagonale retenant les différences + 24,5 — 6,5 + 1,5

+3,5=23, et la seconde +27,5—5,5+2,5+0,5=25, il faut les compléter, ce qui peut se faire par

1.re diagonale. (+24,5—6,5+1,5+3,5) —22,5—11,5—12,5+23,5
2.e diagonale. (+27,5—5,5+2,5+0,5) +21,5—20,5—15,5—10,5

Les verticales auront encore deux différences de chaque diagonale, dont une avec signe changé. Elles peuvent se former comme suit :

1 1 c. 2 2 c.
1.re verticale. (—22,5+12,5—10,5+20,5)+14,5+ 8,5—13,5— 9,5
1 1 c. 2 c. 2
2.e verticale. (—11,5—23,5—21,5—15,5)+16,5+17,5+18,5+19,5

La figure 272 donne les différences, et la figure 273 les nombres.

La 1.re diagonale (*figure* 274) a pour somme des différences forcées —3,5+26,5—26,5—31,5, le nombre—35; et la 2.e diagonale, pour les différences également forcées —0,5+25,5—25,5—28,5, la somme—29. On a conservé les mêmes carrés de coupures et d'horizontales que dans les figures précédentes; on voit (*figure* 274) comment on a construit les diagonales et composé les deux verticales; on s'est dispensé d'entrer dans les détails; la figure 275 est la précédente où l'on a substitué les nombres aux différences.

Il résulte de ce qui précède que les formes du carré de 8 sont susceptibles d'une foule de variations qu'on ne pourrait prévoir, et que les anciennes méthodes n'avaient pu faire connaître. On en pourrait donner une foule d'autres; mais, sans entrer dans de minutieux détails, ce que l'on vient d'exposer suffit pour mettre sur la voie.

Il faut dire quelque chose du carré de 8, en supposant que le carré de coupures est composé de 36 cases.

On a choisi, pour le carré de 6, les 36 nombres du milieu (*figure* 276). Les tableaux sont :

1.er TABLEAU.

15	16	17	18	19	20
20	16	18	17	19	15
20	19	18	17	16	15
15	19	18	17	16	20
20	16	17	18	19	15
15	19	17	18	16	20

2.e TABLEAU.

24	6	6	24	6	24
30	30	0	0	30	0
12	18	18	18	12	12
18	12	12	12	18	18
0	0	30	30	0	30
6	24	24	6	24	6

Avec les différences restantes, qui sont celles de 1 à 14 et complémens, ou de 18,5 à 31,5, on a fait la 1.re horizontale et la 1.re verticale comme suit :

1.re verticale. +20,5+21,5+24,5—29,5—22,5+30,5—25,5—19,5

v. v. c.

1.re horizont. —28,5—27,5+26,5—29,5+22,5+23,5—18,5+31,5

Substituant les nombres aux différences, on a eu le carré (*figure* 276), lequel donne croix régulière à deux bandes.

On voit (*figure* 277) avec quelle facilité la croix se transforme en carré à équerre.

Le carré à châssis (*figure* 278) se déduit avec la même promptitude de l'une ou de l'autre des figures 276 et 277.

L'autre carré à châssis (*figure* 279) ne présente pas plus de difficulté, se déduisant de l'une des trois précédentes figures.

On voit (*figures* 280 *et* 281, *planche* XLI) que les deux diagonales comprennent chacune quatre différences forcées, dont la somme $=0$. Ces différences faisant partie du carré de coupures, l'une d'elles est complément d'une autre dans la même diagonale. Quant aux quatre différences manquantes, celles de la 1.re diagonale sont complémens de celles de la seconde. L'horizontale aura une différence et un complément de la 1.re diagonale. La verticale aura les deux autres différences de la diagonale, dont une avec changement de signe, et de plus deux différences communes avec l'horizontale, aussi avec un changement de signe pour l'une d'elles. Soient ces lignes

Diagonale. —29,5+31,5—30,5+28,5

d. d. c.

Horizontale. +27,5+31,5+22,5—28,5—26,5—25,5+23,5—24,5

d. h. d. c. h. c.

Verticale. —29,5+18,5+22,5+30,5+21,5—19,5—23,5—20,5

Il est facile de placer ces différences (*figure* 280). Le carré se trouve avec les nombres (*figure* 281).

La 1.re diagonale (*figure* 282) a déjà un couple au milieu du carré de coupures, et de plus deux différences forcées de ce carré, et dont la somme est —30; la 2.e diagonale est l'inverse de la première, sauf les deux nombres du milieu, lesquels font un couple. L'horizontale aura une différence commune avec la diagonale, et une autre avec changement de signe aussi commune; il en sera de même de la verticale, laquelle aura, de plus, deux différences communes avec l'horizontale, dont une aussi avec changement de signe. On peut former ces trois lignes comme on le voit ci-après :

Diagonale. —31,5+19,5+20,5+21,5

d. d. c.

Horizontale. +30,5+19,5—20,5+28,5—27,5+25,5—26,5—29,5

d. h. d. c. h. c.

Verticale. —31,5+30,5—23,5—21,5—24,5+22,5+18,5+29,5

On a substitué les nombres aux différences (*planche* XL, *figure* 283).

L'espèce de châssis ou croix à deux branches horizontales d'une bande, la tige composée de deux bandes réunies (*figures* 284 *et* 285), donne pour la 1.re diagonale +14,5—15,5=—1. Ces différences forcées sont dans le carré de coupures. La 2.e diagonale se compose des complémens de la 1.re. Les angles faisant un couple, il faut encore quatre différences. L'horizontale aura deux différences de la diagonale avec un signe changé. La verticale aura les deux autres aussi avec un changement de signe, et deux de l'horizontale, dont une toujours avec un changement de signe. On peut faire ces lignes comme suit :

Diagonale. +25,5+31,5—28,5—27,5

d. d. c.

Horizontale. +25,5—30,5+26,5+27,5—29,5+24,5—23,5—20,5

d. d. c. h. h. c.

Verticale. —22,5+31,5+28,5—21,5—29,5—24,5+19,5+18,5

On verra (*figure* 285) le carré avec les nombres.

Soit le carré de la forme d'un faux châssis représenté (*figures* 286, 287). Si l'on conserve le carré de coupures tel qu'il a été choisi pour les formes précédentes, la première diagonale aurait les nombres forcés 39, 46, 36, 19, 26, dont les différences sont —6,5 —13,5 —3,5 +13,5 +6,5; ce qui se réduit à —3,5. Il

ne faudrait plus que 3 différences en diagonales. Mais on avait fait le carré de coupures avec les 36 nombres du milieu de la progression : il restait donc, pour les horizontales et les verticales, les 14 premiers et les 14 derniers nombres. La plus petite différence était celle de 14, laquelle donne + 18,5; la plus grande était celle de 1, qui devenait + 31,5. Or il est impossible d'obtenir + 3,5 avec trois différences : en effet les deux plus petites + 18,5 + 19,5 ont pour somme 38; et la plus grande 31,5 étant soustraite de cette somme, il reste + 6,5, qui est plus grand que 3,5. On vient d'examiner le cas le plus favorable; on ne réussirait guère mieux en construisant les tableaux de manière à obtenir d'autres différences que — 3,5 à la 3.e case de la 3.e horizontale du carré de coupures : car on voit à la figure 286 que c'est la seule case dont on ait à s'occuper pour les cinq différences forcées. Il arriverait qu'on pourrait avoir les deux diagonales, sans obtenir les autres lignes. Mais si l'on construit le carré de coupures avec les 18 premiers et les 18 derniers nombres, il peut être celui de la figure 287 : alors la diagonale première de la figure 286 aurait 50 à la 3.e case de la 3.e horizontale du carré de coupures; la différence forcée serait donc celle de 50, ou — 17,5. La seconde diagonale aurait les différences forcées de 49 et 17, ou bien — 16,5 + 15,5, qui se réduisent à — 1. Il faut trois différences à la 1.re diagonale pour la compléter, et quatre à la seconde. La 1.re horizontale doit retenir deux différences de chaque diagonale, dont une avec changement de signe. La verticale comprend la différence commune entre la 1.re diagonale et l'horizontale; plus la 3.e différence de cette diagonale avec changement

de signe; de plus les deux autres différences de la 2.e diagonale, dont une avec changement de signe; enfin une différence de l'horizontale avec changement de signe.

On donnera ci-après les tableaux qui ont servi à la composition du carré de coupures, et celui des différences dont on les a tirés.

On a composé les diagonales, horizontale et verticale comme suit :

1.re diag. —17,5 | — 8,5+12,5+13,5
2.e diag. — 1 | —11,5— 5,5+10,5+7,5
             1 d.c.   1 d.   2 d. c.   2 d.
horizont. + 8,5+12,5— 9,5—0,5—10,5+4,5—11,5+6,5
             1 d.   2 d. c.   1 d. c.   h. c.   2 d.
verticale. — 1,5+12,5+ 5,5—2,5—13,5—4,5+ 7,5—3,5

On distribuera ces différences comme suit :

1.re diag. —8,5+12,5+13,5
2.e diag. . . . —11,5—5,5+10,5+7,5
horizont. +8,5+12,5 . —11,5 . —10,5 . —9,5—0,5+4,5+6,5
verticale. . +12,5—13,5 . +5,5 . +7,5 . . —4,5
. . . . —1,5—2,5—3,5

Et en substituant les nombres aux différences (*figure* 287).

1.re diag. 41 20 19
2.e diag. . . . 44 38 22 25
horizont. 24 20 . 44 . 43 . 42 33 28 26
verticale. . 20 46 . 27 . 25 . . 37 . 34 35 36

Voici le carré des différences qui a servi au carré de coupures (*figure* 287).

— 20,5 + 24,5 + 23,5 — 23,5 + 21,5 — 25,5
— 31,5 — 27,5 + 28,5 + 29,5 — 30,5 + 31,5
+ 14,5 — 18,5 — 17,5 — 16,5 + 18,5 + 19,5
— 14,5 + 15,5 + 16,5 + 17,5 — 15,5 — 19,5
+ 26,5 + 30,5 — 28,5 — 29,5 + 27,5 — 26,5
+ 25,5 — 24,5 — 22,5 + 22,5 — 21,5 + 20,5

Quoique cette combinaison de différences ne paraisse pas présenter de symétrie, il ne faut que de l'attention pour la reconnaître.

Les diagonales se composent chacune de 3 couples symétriquement divisés et placés; on voit de plus les deux différences du milieu des deux horizontales et des deux verticales extrêmes répétées, et avec signe changé, ce qui fait couple; et chacune des deux différences restantes de ces mêmes lignes faisant couple avec son opposée. Les diagonales et les 4 lignes du tour étant construites, les deux différences du milieu des 2.e et 5.e horizontales feront couple avec leurs opposées en verticale. Il en est de même des différences du milieu des 2.e et 5.e verticales, qui font couple avec leurs opposées en horizontales.

Voici les tableaux des nombres qui reproduiraient le carré de coupures de la figure 287.

1.er TABLEAU.

5	2	3	2	5	4
4	6	4	3	3	1
6	3	2	1	2	1
5	5	4	3	6	4
6	2	1	2	5	5
1	3	1	4	6	6

2.e TABLEAU.

48	6	6	54	6	54
60	54	0	0	60	0
12	48	48	48	12	12
42	12	12	12	42	48
0	0	60	60	0	54
6	54	54	6	48	6

Il est bien impossible de prévoir de semblables tableaux.

Ils résultent cependant du carré des différences ci-dessus. Il est clair qu'il faudra que le 1.er tableau contienne 6 fois les 6 premiers nombres, puisqu'on doit avoir les 18 premiers et les 18 derniers, sans qu'il soit nécessaire que chaque ligne ait pour somme 21. Quant au 2.e tableau, il faut aussi que 0, 6, 12 y soient répétés 6 fois. Maintenant le plus petit des 18 derniers est 47, qui se fait par 42 + 5, et ensuite 48 = 42 + 6 : donc 42 ne sera que 2 fois dans ce 2.e tableau; 48 y sera 6 fois; 54 de même; ce qui conduira à 54 + 6 = 60. Il faudra donc ici que 60 figure 4 fois pour avoir 61, 62, 63, 64. On voit combien ce genre de tableau diffère des seconds tableaux donnés jusqu'ici, et combien de nouvelles combinaisons résultent des carrés formés par les différences.

ARTICLE VIII.

MANIÈRES DE FORMER LES CARRÉS AVEC LES DIFFÉRENCES.

CARRÉ DE 5.

$$
\begin{array}{rrrrr}
12 & +7 & +2 & -10 & -11 \\
-9 & +4 & -5 & +1 & +9 \\
-8 & -3 & 0 & +3 & +8 \\
-6 & -1 & +5 & -4 & +6 \\
+11 & -7 & -2 & +10 & -12
\end{array}
$$

Rien n'est plus facile que cette manière de former le carré. Après avoir fait deux diagonales, dont les différences sont symétriquement placées pour les complémens, on complète la 1.re horizontale, et les différences ont leurs com-

plémens aux cases opposées. On en fait autant à la 1.re verticale. Il reste à voir si les deux différences restantes étant placées l'une en horizontale, et l'autre en verticale, rendent la somme des différences de ces lignes égale à 0.

Ici l'on a 5 et 3, qui complètent la 2.e horizontale et la 2.e verticale.

Cette manière de former le carré de 5 par les différences n'est pas la plus commode, et souvent on serait obligé de revenir sur ses pas. Il est préférable d'agir comme suit :

On construira la 1.re horizontale avec 5 différences, puis la 2.e avec 3 seulement des différences restantes, dont la somme sera=0. Cela résulte de ce que les deux différences qui doivent compléter cette 2.e horizontale, sont complémens l'une de l'autre.

On formera ensuite la 1.re verticale, dans laquelle on fera entrer deux différences de la 1.re horizontale, dont une avec signe changé. Il restera une différence, laquelle doit être égale à la différence de deux des trois différences de la 2.e horizontale.

Soient la 1.re horizontale	11+10—12—6—3
la 2.e horizontale	9— 7— 2
Il reste les différences	1 4 5 8
Soit la 1.re verticale	10+ 3— 8—1—4

On n'aura plus que 5 pour différence restante ; or 7—2=5 : ainsi la 2.e verticale sera 7—2—5, et l'on pourra construire le carré. On né s'est pas occupé des diagonales, parce qu'elles sont composées de deux couples et du moyen.

Voici ce carré :

PAR LES DIFFÉRENCES.					PAR LES NOMBRES.				
+10	+11	—12	—6	— 3	3	2	25	19	16
— 8	— 2	+ 9	—7	+ 8	21	15	4	20	5
— 1	— 5	+ 0	+5	+ 1	14	18	13	8	12
— 4	+ 7	— 9	+2	+ 4	17	6	22	11	9
+ 3	—11	+12	+6	—10	10	24	1	7	23

On n'éprouve point de difficulté à placer les différences.

D'abord les deux différences communes à la 1.re horizontale et à la 1.re verticale se mettent aux angles, savoir : celle qui conserve son signe à l'angle supérieur gauche, et celle dont le signe est changé à l'angle supérieur de droite avec son signe, et à l'angle inférieur gauche avec ce signe changé. Le 4.e angle contient la différence de l'angle supérieur gauche avec changement de signe.

On place ensuite arbitrairement les trois différences de la 1.re horizontale, et de même les 3 différences de la 1.re verticale : les cases opposées retiennent ces mêmes différences avec signe changé.

On met la différence commune, qui garde son signe, à la 2.e case de la 2.e horizontale : ici c'est —2. Celle qui est commune à la 2.e horizontale et à la 2.e verticale se place avec son signe à la 4.e case de la 2.e horizontale : elle est —7; et avec changement de signe à la 4.e case de la 2.e verticale. Enfin on place au milieu de la 2.e horizontale la différence restante pour cette ligne : elle est + 9; et au milieu de la 2.e verticale la différence non employée, qui est —5.

Il est intéressant de connaître les tableaux qui auraient donné le carré en nombres. Voici ces tableaux.

1.er TABLEAU.

3	2	5	4	1
1	5	4	5	5
4	3	3	3	2
2	1	2	1	4
5	4	1	2	3

2.e TABLEAU.

0	0	20	15	15
20	10	0	15	0
10	15	10	5	10
15	5	20	10	5
5	20	0	5	20

Que devient la méthode de La Hire à l'inspection de semblables tableaux? Et combien d'autres formes peut prendre le carré des différences? Nous ne pousserons pas plus loin l'examen de ces formes.

CARRÉ DE 6.

On a donné (*planche* XXXVIII, *figure* 238) une des formes du carré de 6 avec les différences; mais ce carré en peut recevoir beaucoup d'autres. Soient les 36 nombres qui doivent le composer les premiers de la série naturelle commençant par l'unité. S'ils étaient différens, il n'y aurait qu'à substituer les différences données à celles des nombres de cette série.

Les 18 différences pour les 36 nombres sont les suivantes:

1 + 17,5 — 36	7 + 11,5 — 30	13 + 5,5 — 24
2 + 16,5 — 35	8 + 10,5 — 29	14 + 4,5 — 23
3 + 15,5 — 34	9 + 9,5 — 28	15 + 3,5 — 22
4 + 14,5 — 33	10 + 8,5 — 27	16 + 2,5 — 21
5 + 13,5 — 32	11 + 7,5 — 26	17 + 1,5 — 20
6 + 12,5 — 31	12 + 6,5 — 25	18 + 0,5 — 19

Qu'on fasse avec les différences 3 groupes de 4 différences dont la somme soit = 0; ce seront les parties non répétées des horizontales; il restera 6 différences. On fera trois autres groupes, qui seront ceux des 3 verticales premières. Ces

derniers groupes auront deux différences communes avec une horizontale, et deux différences sur les 6 restantes; on changera le signe d'une des différences communes. Les groupes ne sont composés que de 4 différences, parce qu'on en suppose une dans chaque ligne répétée avec signe contraire, et par conséquent faisant un couple.

Soient les groupes des horizontales

1.re	13,5 + 9,5 — 17,5 — 5,5
2.e	12,5 — 15,5 + 7,5 — 4,5
3.e	14,5 — 10,5 — 3,5 — 0,5

Puisqu'on doit avoir deux différences d'une horizontale, dont une avec signe changé, pour chaque verticale, on cherchera les différences de différences, mais positivement seulement par addition et soustraction; ce qui s'obtient en changeant l'un des signes des différences ci-dessus, prises deux à deux. Il est inutile de s'occuper des valeurs négatives : car les différences des différences des horizontales peuvent toujours se prendre positivement.

Voici ces différences de différences.

1.re	4	31	19	27	15	12
2.e	28	5	17	23	11	12
3.e	25	18	15	7	10	3

Les six différences restantes sont 1,5... 2,5... 6,5... 8,5... 11,5... 16,5; leurs différences positives, par addition et soustraction, sont :

1,5+ 2,5= 4.... 1,5+ 6,5= 8.... 1,5+ 8,5=10.... 1,5+11,5=13.... 1,5+16,5=18
2,5− 1,5= 1.... 6,5− 1,5= 5.... 8,5− 1,5= 7.... 11,5− 1,5=10.... 16,5− 1,5=15
2,5+ 6,5= 9.... 2,5+ 8,5=11.... 2,5+11,5=14.... 2,5+16,5=19
6,5− 2,5= 4.... 8,5− 2,5= 6.... 11,5− 2,5= 9.... 16,5− 2,5=14
6,5+ 8,5=15.... 6,5+11,5=18.... 6,5+16,5=23
8,5− 6,5= 2.... 11,5− 6,5= 5.... 16,5− 6,5=10
8,5+11,5=20.... 8,5+16,5=25
11,5− 8,5= 3.... 16,5− 8,5= 8
11,5+16,5=28
16,5−11,5= 5

Il faut parmi ces différences de différences en choisir une égale à l'une des différences de la 1.re horizontale, agir de même pour la 2.e et pour la 3.e horizontale, de manière que les 6 différences restantes soient employées. Ainsi, par exemple, 19, différence de la 1.re horizontale, aura 16,5+2,5; de même, 5, différence de la 2.e horizontale, peut se compenser avec 11,5—6,5=5; enfin 7, de la 3.e horizontale, aurait en verticale 8,5—1,5. Les verticales seraient donc :

13,5+5,5—16,5—2,5 1.re
12,5—7,5—11,5+6,5 2.e
10,5—3,5— 8,5+1,5 3.e

On voit qu'on prend négativement les dernières différences de différences. Il devenait inutile de s'occuper du double signe : car si l'on prenait les différences de différences des horizontales négatives, celles des verticales seraient positives, et réciproquement. On aura le carré résultant des groupes ci-dessus (*planche* XXXVIII *bis*, *figure a*).

Après avoir construit les diagonales d'après les groupes horizontaux et verticaux, en prenant dans ces groupes les différences communes, dont une a son signe changé, chaque groupe ne contenant que quatre différences, on place les deux restantes dans les cases de leur ligne, lorsqu'elles ne doivent point avoir de différences complémens l'une de l'autre. Ainsi, les diagonales étant formées, et les complémens placés aux cases symétriques de chacune, la 1.re horizontale aura après les angles +9,5—17,5, chacune de ces différences ayant son complément à la case opposée; mais alors la 3.e verticale aura —8,5+1,5 op-

posés, et ces deux différences répétées avec signe changé compléteront l'horizontale première. Quant à la 2.e horizontale, puisque les différences de diagonale sont déjà placées, il faut que —15,5—4,5 soient au milieu de cette ligne, et que leurs complémens soient aux cases opposées. La 1.re verticale, ayant—16,5, et son complément à la case opposée, cette 2.e horizontale est complète. La 3.e ayant les différences des diagonales déjà placées, et 14,5 —0,5 à ses extrémités, il faudra que—11,5, commun avec la 2.e verticale, soit répété à la case opposée avec signe changé. La 1.re verticale s'achève en répétant la différence du milieu, et en changeant le signe. L'inspection de la figure est plus propre que le détail qu'on vient de donner, à faire saisir la marche à suivre, soit dans le cas particulier, soit dans tous les autres où l'on composerait autrement les groupes.

On a trouvé pour le résultat du tableau des différences de différences les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 18, 19, 20, 23, 25, 28; mais 1, 2, 6, 8, 9, 13, 14, 20, ne font pas partie des différences de différences des horizontales. On n'aurait donc plus à examiner que les restantes, 3, 4, 5, 7, 10, 11, 15, 18, 19, 23, 25, 28.

Sur ces différences restantes, la 1.re horizontale n'a que 4, 15, 19 communes; la seconde n'a que 5, 11, 23, 28, et la troisième les autres, 3, 7, 10, 15, 18, 25.

Pour ne point laisser échapper de combinaisons dans la composition de trois horizontales à volonté, ou plutôt des trois groupes horizontaux, on compare chacune des trois différences 4, 15, 19, avec celles du 2.e groupe, et l'on

s'assure si chacune de celles du troisième peut remplir la condition exigée. Soit d'abord pris 4, qu'on obtient par 1,5+2,5.... 6,5—2,5. Soit choisi le premier nombre du 2.e groupe de différences, lequel est 5. Ce nombre s'obtient par 16,5—11,5.... 6,5—1,5.... 11,5—6,5. Si l'on compare 1,5+2,5 avec ces dernières différences, il faut rejeter 6,5—1,5. Puisque 1,5 est déjà employé, il ne reste que 16,5—11,5 et 11,5—6,5 : il faudrait donc les différences 6,5 et 8,5, ou bien 8,5 et 16,5. Or 6,5 et 8,5 ne donnent que 15 et 2; 8,5 et 16,5 n'ont que 25 et 8 pour différences; mais 2 et 8 ne font pas partie du 3.e groupe de différences : il n'y aurait donc que 15 et 25. Ainsi les groupes verticaux seraient :

13,5	—	9,5	—	1,5	—	2,5	1.er
12,5	—	7,5	—	11,5	+	6,5	2.e
14,5	+	10,5	—	8,5	—	16,5	3.e

ou bien

13,5	—	9,5	—	1,5	—	2,5	1.er
12,5	—	7,5	—	16,5	+	11,5	2.e
14,5	+	0,5	—	6,5	—	8,5	3.e

Soit comparé 1,5+2,5 à 11 du 2.e groupe de différences. Comme 11 n'est formé que par 2,5+8,5, et que 2,5 n'en peut faire partie, il est inutile de s'occuper du 3.e groupe.

Venant à 23 du 2.e groupe, on a 23=6,5+16,5 : il reste 8,5 et 11,5, leurs différences sont 20 et 3. Il n'y a que 3 qui fasse partie du 3.e groupe, et l'on aura les groupes verticaux :

13,5	—	9,5	—	1,5	—	2,5	1.re
15,5	+	7,5	—	6,5	—	16,5	2.e
3,5	—	0,5	—	11,5	+	8,5	3.e

Passant à 28 = 11,5 + 16,5, il faut pour le 3.e groupe les différences 6,5 et 8,5; leurs différences sont 15 et 2; et, comme 15 fait partie de ce 3.e groupe, on aura les trois groupes verticaux :

13,5	—	9,5	—	1,5	—	2,5	1.er
12,5	+	15,5	—	11,5	—	16,5	2.e
14,5	+	0,5	—	8,5	—	6,5	3.e

Après avoir épuisé les combinaisons de 4 composé de 1,5 + 2,5, on prendra 4 = 6,5 — 2,5; et l'on agira comme on l'a fait pour 1,5 + 2,5. On peut établir les tableaux :

5 = 16,5 — 11,5 = 6,5 — 1,5 = 11,5 — 6,5
11 = 2,5 + 8,5
23 = 6,5 + 16,5
28 = 11,5 + 16,5

3 = 11,5 — 8,5
15 = 6,5 + 8,5 = 16,5 — 1,5
7 = 8,5 — 1,5
25 = 8,5 + 16,5
10 = 11,5 — 1,5 = 8,5 + 1,5
18 = 6,5 + 11,5 = 1,5 + 16,5

Il faut supprimer les valeurs où entre 6,5 ou 2,5; il reste donc :

1.er GROUPE DE DIFFÉRENCES.

5 = 16,5 — 11,5
28 = 11,5 + 16,5

2.e GROUPE DE DIFFÉRENCES.

3 = 11,5 — 8,5
7 = 8,5 — 1,5
10 = 11,5 — 1,5 = 8,5 + 1,5

15 = 16,5 — 1,5
18 = 16,5 + 1,5
25 = 16,5 + 8,5

Si l'on prend 5 = 16,5 — 11,5, il faut encore 8,5 et 1,5;

or 7=8,5—1,5, et 10=8,5+1,5, ce qui donne les groupes verticaux :

13,5	—	9,5	—	6,5	+	2,5	1.er
12,5	—	7,5	—	16,5	+	11,5	2.e
10,5	—	3,5	—	8,5	+	1,5	3.e

13,5	—	9,5	—	6,5	+	2,5	1.er
12,5	—	7,5	—	16,5	+	11,5	2.e
10,5	—	0,5	—	8,5	—	1,5	3.e

Soit 28=11,5+16,5 : on aura toujours 7=8,5—1,5, et 10=8,5+1,5, et il viendra les groupes verticaux :

13,5	—	9,5	—	6,5	+	2,5	1.er
12,5	+	15,5	—	11,5	—	16,5	2.e
10,5	—	3,5	—	8,5	+	1,5	3.e

13,5	—	9,5	—	6,5	+	2,5	1.er
12,5	+	15,5	—	11,5	—	16,5	2.e
10,5	—	0,5	—	8,5	—	1,5	3.e

Après avoir épuisé les combinaisons du nombre 4, on passera au nombre 15, qui est 6,5+8,5=16,5—1,5; comparant d'abord 6,5+8,5, il viendra, en supprimant les valeurs où entrent 6,5 et 8,5 :

5=16,5—11,5	15=16,5—1,5
28=16,5+11,5	18=16,5+1,5

Comme 16,5 se trouve partout, il n'y a point de combinaisons pour 6,5 et 8,5 au second groupe de différences; il faut voir 16,5—1,5, et l'on aura :

5=11,5— 6,5	13=11,5— 8,5
11= 2,5+ 8,5	15= 6,5+ 8,5
	18= 6,5+11,5

Il n'y a rien pour 5, puisque 3,15 et 18 contiennent ou 11,5 ou 6,5; mais 11=8,5+2,5 aurait 18=6,5+11,5, ce qui donnerait les groupes verticaux :

9,5+5,5—16,5+ 1,5 1.er
15,5—4,5— 2,5— 8,5 2.e
14,5+3,5— 6,5—11,5 3.e

Comparant la 3.e différence 19 aux 2.e et 3.e groupes de différences, on a : 19= 2,5+16,5

5= 6,5— 1,5=11,5—6,5	3=11,5— 8,5
	7= 8,5— 1,5
	10= 1,5+ 8,5=11,5—1,5
	15= 6,5+ 8,5
	18= 6,5+11,5

Il viendra donc les groupes verticaux :

1.er groupe. .	13,5+ 5,5— 2,5—16,5 13,5+ 5,5— 2,5—16,5 13,5+ 5,5— 2,5—16,5
2.e groupe. .	12,5— 7,5— 6,5+ 1,5 12,5— 7,5—11,5+ 6,5 12,5— 7,5—11,5+ 6,5
3.e groupe. .	3,5— 0,5—11,5+ 8,5 10,5— 3,5— 8,5+ 1,5 10,5— 0,5— 8,5— 1,5

On aura donc douze manières de composition des ver-

ticales pour le système choisi d'horizontales; mais ces dernières lignes peuvent être formées d'une foule de manières, et le genre de carré choisi est loin d'être le seul qui puisse être employé.

On s'est appesanti sur ce carré de 6, afin de faire voir comment on peut déduire d'un système les combinaisons qu'il entraîne.

CARRÉ DE 7.

Il faut faire attention à la marche que l'on va suivre pour le carré impair de 7. On suppose que le moyen est au centre du carré, et que les complémens sont tous aux cases symétriques. Ce genre de construction est un des plus simples que l'on puisse employer.

On formera 3 groupes de différences pour les 3 premières horizontales; ensuite 3 pour les premières verticales; chacun comprendra deux différences de chaque horizontale, dont une avec changement de signe. Il reste 3 différences, et chaque verticale doit en avoir une avec un signe quelconque.

Soient les horizontales

$$24 + 23 - 22 - 21 - 20 + 19 - 3$$
$$18 + 17 - 16 - 15 - 14 + 12 - 2$$
$$13 + 11 + 8 - 9 - 10 - 7 - 6$$

Il reste les trois différences 1, 4, 5. Qu'on prenne les différences de différences de chaque horizontale :

24—23= 1.....24+22=46.....24+21=45.....
24+20=44.....24—19= 5.....24+ 3=27.....
23+22=45.....23+21=44.....23+20=43.....
23—19= 4.....23+ 3=26.....22—21= 1.....
22—20= 2.....22+19=41.....22— 3=19.....
21—20= 1.....21+19=40.....21+ 3=24.....
20+19=39.....20— 3=17.....19+ 3=22

La première horizontale aura les différences de différences 1, 2, 4, 5, 17, 19, 22, 24, 26, 27, 39, 40, 41, 43, 44, 45, 46.

18—17= 1.....18+16=34.....18+15=33.....
18+14=32.....18—12— 6.....18+ 2=20.....
17+16=33.....17+15=32.....17+14=31.....
17—12= 5.....17+ 2=19.....16—15= 1.....
16—14= 2.....16+12=28.....16— 2=14.....
15—14= 1.....15+12=27.....15— 2=13.....
14+12=26.....14— 2=12.....12+ 2=14

La 2.e horizontale aura donc les différences de différences 1, 2, 5, 6, 12, 13, 14, 19, 20, 26, 27, 28, 31, 32, 33, 34.

On aura pour la 3.e horizontale les différences de différences :

13—11= 2.....13— 8= 5.....13+ 9=22.....
13+10=23.....13+ 7=20.....13+ 6=19.....
11— 8= 3.....11+ 9=20.....11+10=21.....
11+ 7=18.....11+ 6=17..... 8+ 9=17.....
8+10=18..... 8+ 7=15..... 8+ 6=14.....
10— 9= 1..... 9— 7= 2..... 9— 6= 3.....
10— 7= 3.....10— 6= 4..... 7— 6= 1

Elle aura donc 1, 2, 3, 4, 5, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23.

Pour obtenir toutes les variations, il faudrait combiner toutes les différences de différences de la 1.re horizontale avec celles de la seconde, en plus et en moins, et le résultat de ces combinaisons avec toutes les différences de différences de la 3.e horizontale; mais cette recherche serait longue, quoique facile. On se contentera de ce qui vient d'être dit.

Soit faite la 1.re verticale 22—21+16—14+ 7—6(—4)
la 2.e........ 23+20—18—15—13+8(—5)

Il reste de la 1.re horizontale 24+19—3; de la 2.e, 17 +12—2; de la 3.e, 11+9—10. Les différences de différences sont :

1.re horizontale	5	27	22
2.e..........	5	19	14
3.e..........	20	21	1

Il faut combiner trois de ces différences de différences prises dans chacun des groupes ci-dessus, de manière que le résultat soit égal $\pm$ 1, puisque 1 est la seule différence restante ; or il n'y a que 5—5+1 ou 5—5—1 qui convienne. On aura donc pour la 3.e verticale 24—19 +12—17+10—9 (—1), ou 24—19+12—17+9—10 (+1). On aura le carré résultant, avec les différences et avec les nombres, en prenant 10—9 à la 3.e verticale. (*Planche* XXXVIII *bis*, *figures b et c*.)

Voici les tableaux qui auraient formé le carré ci-dessus, qui est parfaitement symétrique, et auquel on ne parvient qu'au moyen des différences :

1.er TABLEAU.

4	2	1	7	6	3	5
4	5	6	6	1	7	6
3	3	6	7	7	5	4
1	2	5	4	3	6	7
4	3	1	1	2	5	5
2	1	7	2	2	3	4
3	5	2	1	7	6	4

2.e TABLEAU.

42	0	0	21	0	42	42
35	35	7	21	7	0	35
28	14	28	7	28	7	28
28	28	21	21	21	14	14
14	35	14	35	14	28	14
7	42	35	21	35	7	7
0	0	42	21	42	42	0

Il n'est pas possible de soupçonner la composition de tableaux aussi irréguliers l'un que l'autre. Cela prouve que la méthode de La Hire, et de tous les autres auteurs, est très-bornée, et ne donne qu'une partie des combinaisons propres à former un carré magique.

CARRÉ DE 8.

On va voir combien les moyens expéditifs donnés ailleurs sont loin de fournir la vraie méthode qu'il convient d'adopter pour obtenir les carrés simples: il n'y a, on le répète, que les différences pour faire varier les carrés à volonté. Sauveur a eu cette idée, mais il ne l'a pas développée. Toute construction de carrés simples se résout en différences d'après les précédentes méthodes; mais ces méthodes ne donnent pas tous les systèmes des différences.

Voici un système de différences pour le carré de 8 qu'on doit retenir. On forme une diagonale; les différences ont leurs complémens aux cases opposées. L'autre diagonale est complémentaire de la première. Les 4 dernières horizontales sont complémens des 4 premières. Chaque horizontale a deux différences de la diagonale, dont une avec changement de signe.

Soient les horizontales comme suit :

	d.						d.	
1.re horizon.	+20,5	—31,5	—30,5	+29,5	+28,5	—26,5	+14,5	— 4,5
		d.				d.		
2.e.........	—22,5	+19,5	—27,5	—25,5	+24,5	+15,5	+23,5	— 7,5
			d.		d.			
3.e..........	—21,5	—13,5	+18,5	+11,5	+16,5	—12,5	+10,5	—9,5
				d.				d.
4.e..........	— 8,5	— 6,5	— 3,5	+17,5	— 2,5	— 1,5	— 0,5	+5,5

Les lettres *d* sur les différences désignent celles qui sont communes avec la diagonale.

On trouvera (*figures* 260, 261, *planche* XXXIX) les carrés par différences et par nombres, d'après les horizontales et les diagonales ci-dessus. Il n'est pas besoin de s'occuper des verticales : car il est indifférent, d'après la construction de ce carré, de mettre telle ou telle différence d'une horizontale à telle ou telle place, l'horizontale restant composée des mêmes différences, et les verticales de 4 différences et leurs complémens.

Voici les tableaux résultant du carré (*figure* 261).

1.er TABLEAU.

4	8	7	3	5	3	4	2
4	5	2	7	8	8	1	1
6	6	6	5	2	8	5	6
1	7	4	3	7	3	2	1
8	2	5	6	2	6	7	8
3	3	3	4	7	1	4	3
5	4	7	2	1	1	8	8
5	1	2	6	4	6	5	7

2.e TABLEAU.

8	56	56	56	32	0	0	16
56	8	56	48	32	0	16	8
40	40	8	40	40	8	16	16
40	32	32	24	8	32	32	32
16	24	24	32	48	24	24	24
8	16	48	16	16	48	40	40
0	48	0	8	24	56	40	48
48	0	0	0	24	56	56	40

Que deviennent les méthodes données, si on les compare à ces tableaux? On pourrait les former sans recourir aux différences : on commencera par une diagonale. On voit que, dans le 1.er tableau, l'une d'elles comprend tous

les nombres de 1 à 8; la seconde est composée des complémens à 9 de la première, et par ordre : ainsi 2 est à l'angle supérieur correspondant à 7, angle inférieur de la première; 1 correspond à 8; 8 à 1, etc. Quant au 2.e tableau, ayant formé l'une des diagonales, dont la valeur est 224, l'autre aura les complémens à 56 de ceux de la première, comme dans le premier tableau. Les diagonales formées, on établira les horizontales de chaque tableau à volonté, et chacune contiendra une différence de chaque diagonale. Les 4 autres horizontales auront, comme on l'a dit, les complémens des premières. Il faut que la somme de deux horizontales de même rang, prise dans chaque tableau, soit $=260=4\cdot65=4$ couples.

Chaque ligne du 1.er tableau vaudrait 36 si elle contenait les 8 nombres de la racine; mais les multiples procédant par ceux de 8, on ne pourrait augmenter ou diminuer 36 que de ce multiple : alors la valeur des lignes du 2.e tableau diminuerait ou augmenterait du même multiple. Le premier tableau pourrait donc n'avoir, dans quelques-unes de ses lignes, que 12, 20, 28, ou, en augmentant, 44, 52, 60. Le second contiendrait alors, dans les lignes correspondantes, 248, 240, 232, et 224 pour 36 dans le premier, ou 216, 208, 200. Dans les tableaux ci-dessus les deux premières horizontales du premier ont 36, la 3.e 44, et la 4.e 28. Les lignes correspondantes du 2.e ont pour somme les complémens à 260.

Il est indispensable de faire attention aux conditions suivantes, lors de la composition des tableaux, si l'on ne procède pas par différences.

1.° Il ne faut pas qu'un même nombre d'un tableau, ou

seulement des 4 premières horizontales, coïncide avec un même nombre du second, plus d'une fois; et si cela a lieu pour les 4 premières horizontales, cela aura lieu aussi pour les 4 dernières, sans être obligé d'en faire la vérification; mais si l'un des tableaux contient plus de 4 fois un même nombre dans les 4 premières horizontales, comme au 2.e tableau, il est nécessaire de faire la vérification, pour s'assurer que ce nombre peut s'ajouter aux 8 nombres de la racine ou des multiples : autrement le carré magique aurait des nombres répétés.

2.° Lorsque, dans un tableau, un nombre entre plus de 4 fois dans les 4 premières horizontales, son complément ne doit y figurer qu'un nombre de fois tel qu'en tout on ait 8, tant pour ce nombre que pour son complément.

3.° Il ne serait pas impossible que, le 1.er tableau étant formé, et un nombre vérifié pour les 4 premières horizontales, on trouvât ce même nombre rapporté à plusieurs autres égaux. Il faut s'assurer que cet inconvénient n'a pas lieu. Cela arrivera toutes les fois que, dans les quatre premières horizontales de chaque tableau, deux nombres complémens l'un de l'autre seront placés dans la même ligne et dans le même ordre. Par exemple, soient dans le 1.er tableau et à la 2.e horizontale, aux 2.e et 5.e rangs, les nombres 6, 3, complémens l'un de l'autre; et dans le 2.e, 24, 32, aussi à la 2.e horizontale et aux mêmes rangs : on aurait au 1.er tableau 3 et 6 à la 7.e horizontale aux 2.e et 5.e rangs, ainsi que 32, 24, à la même horizontale et aux mêmes rangs dans le 2.e tableau. Il résulterait que 6 et 3 s'ajouteraient deux fois avec un même nombre; et cela

aurait lieu quoique chaque nombre ne figurât que 4 fois dans chaque horizontale dans les deux tableaux.

Les observations qui précèdent, et d'autres analogues, suivant le genre de constructions, doivent toujours être prises en considération.

CARRÉ DE 10.

On veut que le milieu des lignes du tour du carré soit composé de différences répétées; que les extrémités des 2.e, 3.e, 4.e, 7.e, 8.e, 9.e horizontales soient également répétées, ainsi que les 4.e et 7.e cases de la 5.e. Soient aussi répétées les différences des 2.e, 3.e, 8.e et 9.e verticales aux extrémités; les 3.e et 8.e cases des 4.e et 7.e; enfin les 4.e et 7.e cases de la 5.e. On pourra composer comme suit les 5 horizontales, qui ne contiendront que 8 différences, à raison de l'omission de celle qui est répétée, laquelle dépend des verticales, comme celle omise en verticale dépend des horizontales. Soient les horizontales

47,5—48,5+40,5—46,5+49,5+42,5—43,5—41,5
38,5—37,5—34,5—35,5+33,5+31,5+36,5—32,5
27,5—28,5+24,5+25,5—23,5—26,5—21,5+22,5
13,5+11,5—12,5—14,5+16,5—15,5—17,5+18,5
7,5— 8,5— 9,5+ 5,5+ 4,5— 0,5— 1,5+ 2,5

Les différences non employées sont : 3,5, 6,5, 10,5, 19,5, 20,5, 29,5, 30,5, 39,5, 44,5, 45,5.

La 1.re verticale n'ayant que deux différences communes avec les horizontales, savoir, les deux angles, il faut y ajouter 6 des 10 différences restantes, et l'on peut la former par

47,5 — 49,5 — 44,5 — 3,5 — 20,5 + 10,5 + 30,5 + 29,5,
l'une des différences ayant changement de signe.

La 2.e aura deux différences de chacune des 2.e, 3.e, 4.e et 5.e horizontales, dont une avec changement de signe, et pourrait être

34,5 — 35,5 + 24,5 — 25,5 + 13,5 — 16,5 + 7,5 — 2,5

La 3.e se composera comme la seconde, et on la ferait

38,5 — 33,5 + 28,5 — 23,5 + 12,5 — 14,5 — 9,5 + 1,5

La 4.e aurait deux différences communes avec les 1.re, 2.e et 4.e horizontales, et, de plus, deux des différences restantes; parmi les premières, l'une a son signe changé. Soit cette verticale

40,5 + 41,5 — 37,5 — 36,5 + 15,5 — 17,5 + 39,5 — 45,5

La 5.e doit avoir 2 différences des 2.e, 3.e et 5.e horizontales, dont une avec changement de signe, plus les deux restantes; or on a encore de la 2.e horizontale + 31,5 — 32,5; de la 3.e, + 27,5 — 26,5 — 21,5 + 22,5; et de la 5.e, 5,5 + 4,5 — 8,5 — 0,5. Il faut prendre une différence de différences de chacune de ces lignes, de manière à avoir avec les deux restantes une somme = 0. Ces deux restantes, qui sont 6,5 et 19,5, ont pour différences de différences 19,5 + 6,5 = 26.... 19,5 — 6,5 = 13 : donc il viendra ± 26 et ± 13 : d'où il suit que la somme des différences d'horizontales à prendre doit être ± 26.... ± 13; mais 31,5 — 32,5 ne donne que ± 64. Donc il viendrait, en combinant ± 64 avec ± 26 et ± 13, les quatre sommes ± 90, ± 77, ± 38, ± 51. Il faut donc que les deux différences de différences prises de la 3.e et de la 5.e horizontales ajoutées aient une somme = ± 90, ± 77, ± 38, ± 51.

Les différences de différences de la 3.e horizontale sont :
27,5 + 26,5 = 54 .... 27,5 + 21,5 = 49 .... 27,5 — 22,5 = 5.... 26,5 — 21,5 = 5.... 26,5 + 22,5 = 49.... 21,5 + 22,5 = 44.

Celles de la 5.e horizontale deviennent :
5,5 — 4,5 = 1.... 5,5 + 8,5 = 14..... 5,5 + 0,5 = 6..... 4,5 + 8,5 = 13..... 4,5 + 0,5 = 5.... 8,5 — 0,5 = 8.

Ainsi la 3.e horizontale aurait 5, 44, 49, 54,

Et la 5.e horizontale, 1, 5, 6, 8, 13, 14.

Comparant successivement, par addition et soustraction, chacune des premières différences à toutes celles de la 5.e, on aurait :

6	4	10	0	11	1	13	3	18	8	19	9
45	43	49	39	50	38	52	36	57	31	58	30
50	48	54	44	55	43	57	41	62	36	63	35
55	53	59	49	60	48	62	46	67	41	68	40

On ne trouve que 38 qu'on peut prendre positivement ou négativement. 38 provient de 44 — 6; mais 44 = 21,5 + 22,5.... — 6 = — 5,5 — 0,5.... 38 = 64 — 26.... 64 = 31,5 + 32,5.... 26 = 19,5 + 6,5.... 64 — 26 = 31,5 + 32,5 — 19,5 — 6,5. La 5.e verticale sera donc

22,5 + 21,5 — 31,5 — 32,5 — 5,5 — 0,5 + 6,5 + 19,5

On pourrait aussi changer tous les signes.

On voit (*planche* XXXVIII *bis*, *figure d*) le carré de 10 d'après les horizontales et verticales précédemment construites.

La 1.re horizontale aura aux angles 47,5 et 49,5, d'après la 1.re verticale; les complémens sont aux angles opposés.

Cette 1.re verticale se remplit à volonté, avec ses différences, à l'exception des deux cases du milieu. La 2.e horizontale aura — 35,5 — 34,5 en diagonale, d'après la 2.e verticale. La 3.e horizontale, 5 — 23,5 — 28,5, d'après la 3.e verticale; et ainsi de suite pour les deux diagonales. La dernière verticale, sauf les cases du milieu, comprend par ordre les complémens de la première. On voit que 24,5 et 25,5 sont à la 3.e horizontale et à la 2.e verticale; de même 13,5 et 16,5 sont à la 4.e horizontale et à la 2.e verticale, toujours en changeant un signe des horizontales, à raison du complément en verticale. Il est facile de continuer à remplir les lignes. Quant aux cases du milieu, celles des premières et des dernières horizontales se complètent par la 5.e verticale, qui doit avoir + 19,5 + 6,5. On peut mettre celle que l'on voudra à la 1.re horizontale : car, puisque l'une et l'autre est répétée, cela n'apportera aucune différence dans la somme des groupes. De même, la 5.e horizontale ayant 4,5 — 8,5, on met celle que l'on veut à la 1.re verticale, par la raison ci-dessus, et le carré est complet. Cette construction est facile à retenir, et fournit une immense quantité de combinaisons.

Il n'est pas indispensable d'opérer comme on l'a fait pour le carré de 10, relativement à la distribution des complémens des différences. Il n'est pas plus nécessaire de mettre un nombre et son complément au milieu des 4 lignes qui bordent le carré.

Il est bon de disposer les différences avec méthode, pour faciliter le placement de ces différences. On va le montrer en choisissant d'autres verticales que celles du précédent carré.

Soient toujours les horizontales :

47,5—48,5+40,5—46,5+49,5+42,5—43,5—41,5
38,5—37,5—34,5—35,5+33,5+31,5+36,5—32,5
27,5—28,5+24,5+25,5—23,5—26,5—21,5+22,5
13,5+11,5—12,5—14,5+16,5—15,5—17,5+18,5
7,5— 8,6— 9,5+ 5,5+ 4,5— 0,5— 1,5+ 2,5

VERTICALES.

	1.	2.	3.	4.	5.	*Différences restantes.*
1.	—41,5—47,5					+45,5+39,5+30,5+6,5—29,5—3,5
2.		+31,5—36,5	+27,5+23,5	—15,5—13,5	—9,5—7,5	
3.		—35,5+37,5	—26,5+28,5	+11,5—16,5	—4,5+5,5	
4.	+42,5—49,5	+38,5+34,5		—14,5+12,5		—19,5—44,5
5.		+33,5+32,5	—21,5—24,5		+2,5+8,5	—10,5—20,5

Les nombres supérieurs 1, 2, 3, 4, 5, désignent les horizontales; les mêmes nombres, à gauche, les verticales. Dans chaque colonne on a mis d'abord les différences qui conservent leur signe; cela facilite la position de ces différences dans le carré. On peut même se dispenser de construire le carré des différences, et aller par ordre dans la construction du carré des nombres, comme on l'a fait dans les deux carrés (*planche* XXXVIII *bis, figure e et f*).

Après avoir placé toutes les différences communes aux horizontales et verticales, ainsi que les différences restantes, comme on voit au 1.er carré, on achève, dans le second, en plaçant les différences d'horizontales non employées et leurs complémens. On n'insistera pas davantage sur la composition des carrés au moyen des différences. Ce qui a été dit doit suffire pour guider dans tous les cas. On remarquera qu'il y a quelque différence entre la formation des carrés pairs et celle des impairs.

ARTICLE IX.

CARRÉ DE 9 ET TRANSFORMATIONS.

Il faut, comme pour tous les carrés impairs, agir par séries, ce qui donnera lieu à des observations importantes dans différens cas, afin de ne pas faire d'infructueuses tentatives. Soit d'abord le cas où le carré d'équerre n'est que de 9 cases : le moyen en fait nécessairement partie; or, après la formation du carré d'intersection, il doit y avoir six séries ou groupes de 3 nombres pour compléter le carré. Il faut voir comment on peut former ces séries. On a fait remarquer que la somme des six plus grandes

différences devait surpasser, ou au moins égaler la somme des 12 plus petites. De plus, comme il est impossible qu'un pair puisse réduire un pair et un impair à 0, on ne saurait composer les groupes que de 3 pairs ou d'un pair et deux impairs : d'où il suit que si le nombre des impairs est impair, il y aurait un couple qui n'en contiendrait qu'un ou trois, ce qui est impossible.

D'après ces observations, soit le carré d'équerre construit avec les nombres 1, 11, 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81 ; que le carré d'intersection soit fait avec tous les pairs de 2 à 36 inclusivement, et complémens : on aura pris 36 pairs et 8 impairs, le moyen 41 non compris ; il reste donc encore 4 pairs et 32 impairs, dont la moitié est 2 pairs et 16 impairs, l'autre moitié étant en complémens.

Les différences restantes sont au nombre de 18, dont 16 paires et 2 impaires ; celles-ci répondent à 38 et 40 en nombres. Voici ces différences :

3 + 38		17 + 24		33 + 8	
5 + 36		19 + 22		35 + 6	
7 + 34		23 + 18	(26)	37 + 4	(28)
9 + 32		25 + 16		38 + 3	
13 + 28	(4)	27 + 14		39 + 2	
15 + 26	(18)	29 + 12		40 + 1	

Il faut de toute nécessité que 3 et 1 soient dans le même groupe : car ils ne peuvent faire partie de 2 groupes; donc on a le groupe forcé 4 — 3 — 1 = 0. Maintenant, les 6 plus grandes différences ont pour somme 194, et les 12 plus petites 130. La différence des deux sommes est 64, dont la moitié 32 doit augmenter les petites et diminuer les

grandes différences. Si l'on fait passer 28 et 26 = 54 des grandes parmi les petites, et 4, 18 = 22 parmi les grandes, puisque 4 doit en faire partie, on aura 54 — 22 = 32, et les cinq autres groupes peuvent être

38—24—14....... 36—28—8....... 34—22—12.....
32—26—6....... 18—16—2

Ce sont ceux que l'on a choisis (*fig.* 288, *planche* XLI); les complémens achèvent le carré; il n'y a qu'à substituer les nombres.

On passe facilement du carré à équerre à celui de la figure 289. Le carré total est magique, mais chaque bordure ne l'est pas, il faut les prendre toutes trois : c'est un nouvel exemple de bordure triple.

On n'aurait pu faire le carré en prenant les 18 premiers et les 18 derniers nombres pour le carré d'intersection, et les nombres du milieu pour celui d'équerre : car puisqu'une différence, dans chaque groupe, doit être égale à deux autres, il faudrait que les 6 plus grandes égalassent au moins les 12 plus petites, ce qui ne serait pas. Ce carré exige des précautions particulières.

Si l'on fait le carré d'équerre avec 25 cases, on peut choisir les 25 nombres du milieu; le carré d'intersection peut avoir les 8 premiers et les 8 derniers. La 2.e diagonale aura une différence commune avec le carré d'équerre; et si l'on fait celui-ci par la méthode expéditive, il viendra 45 à l'angle, sa différence est — 4. Les différences restantes sont :

9 + 32	17 + 24	23 + 18
10 + 31	18 + 23	24 + 17
11 + 30	19 + 22	25 + 16
12 + 29	20 + 21	26 + 15
13 + 28	21 + 20	27 + 14
14 + 27	(25) 22 + 19	28 + 13
15 + 26		
16 + 25 (22)		

La somme des 8 plus grandes est 228. Celle des 12 plus petites = 222; différence, 6; moitié, 3. On peut mettre 22 au lieu de 25, et réciproquement. On formera 4 groupes de cinq différences, lesquels peuvent être :

32+31—25—20—18.... 30+29—24—21—14....
28+27—23—19—13.... 26+22—15—16—17

La 2.e diagonale se construira en prenant dans chaque groupe deux différences, dont une avec changement de signe, et telles que leur somme = + 4. Soient choisies les différences —18—31+29+21—19+23—16+15= + 4. Ce choix fixe l'ordre des groupes complémentaires, qui se placent, savoir : les deux des horizontales en horizontale, et ceux des deux groupes verticaux en verticale.

On voit (*figures* 290 *et* 291, *planche* XLI) les carrés des différences et des nombres, d'après les formations particulières ci-dessus.

On aura (*figure* 292, *planche* XLII) le carré d'équerre au centre du carré et bordure double. On a toujours 3 carrés magiques, savoir : le central, le total, et celui d'intersection, en réunissant les 4 parties dans lesquelles il est divisé aux angles.

On a fait (*figure* 293) le carré d'équerre de 49 cases, on a choisi les 49 nombres du milieu de la progression, et ce carré a été fait par la méthode expéditive. La 2.e diagonale aura dans l'équerre cinq nombres, savoir : 26 + 25 + 24 + 30 + 29, dont la somme est 134. Cette diagonale doit avoir 369 = 41 . 9, il manque 235; les nombres restans sont de 1 à 16 et de 66 à 81. Qu'on fasse 235 avec 72 + 80 + 16 + 67 : les différences de ces nombres seront — 31 — 39 + 25 — 26; l'horizontale doit avoir deux de ces 4 différences, dont une avec signe changé; la verticale aura les deux autres, aussi avec un changement de signe, plus deux différences de l'horizontale, dont une avec signe changé. On peut faire ces lignes comme suit :

								d.	d. c.
Horizontale.	40	—36	+38	+37	—28	—29	—30	—31	+39
	h.	h. c.						d.	d. c.
Verticale...	40	+36	+35	+33	—27	—32	—34	—26	—25

Substituant les nombres aux différences, on aura le carré de la figure.

Pour connaître toutes les verticales qui peuvent avoir lieu pour une diagonale et une horizontale déterminées, celles ci-dessus, par exemple, on agira comme il va être dit.

Les deux différences restantes de la diagonale sont + 25 — 26; leur somme, en changeant un signe, est ± 51.

On fera ensuite la somme des 7 différences de la verticale (non compris les deux de la diagonale —31 + 39), et deux à deux, en changeant un signe : il viendra

76 2 3 68 69 70.... 74 73 8 7 6.... 1 66 67 68...
65 66 67.... 1 2.... 1

Ces différences de différences sont, par ordre,

1 2 3 6 7 8.... 65 66 67 68 69 70 73 74 76

Ajoutant à chacune d'elles prise en plus et en moins la différence $\pm$ 51, on aura :

$\overset{1}{\pm 52 \pm 50}$ .... $\overset{2}{\pm 53 \pm 49}$ .... $\overset{3}{\pm 54 \pm 48}$ .... $\overset{6}{\pm 57 \pm 45}$ ....
$\overset{7}{\pm 58 \pm 44}$ ... $\overset{8}{\pm 59 \pm 43}$ .... $\overset{65}{\pm 116 \pm 14}$ ...
$\overset{66}{\pm 117 \pm 15}$ ... $\overset{67}{\pm 118 \pm 16}$ ... $\overset{68}{\pm 119 \pm 17}$ ... $\overset{69}{\pm 120 \pm 18}$ ....
$\overset{70}{\pm 121 \pm 19}$ ... $\overset{73}{\pm 124 \pm 22}$ ... $\overset{74}{\pm 125 \pm 23}$ ... $\overset{76}{\pm 127 \pm 25}$

Les petits chiffres au dessus des différences ci-dessus indiquent les différences ajoutées à $\pm$ 51. Il y a pour chaque différence de différence de l'horizontale quatre valeurs. Ainsi, par exemple, $\pm$ 51 ajouté à $\pm$ 6 donne $+57-57+45-45$, et ainsi des autres. Il est resté après la formation de la diagonale et de l'horizontale les différences 35, 34, 33, 32, 27, qui doivent, par leur combinaison, donner une somme égale à l'une de celles ci-dessus. La plus grande est 127; et, comme la somme des cinq différences est plus grande que 127, on ne peut les ajouter; on peut en prendre quatre positivement, et retrancher la cinquième. La somme des cinq différences est 161. Retranchant successivement le double de chacune des différences, ou 54, 64, 66, 68, 70, on aurait 107, 97, 95, 93, 91, pour le résultat de la soustraction de l'une d'elles de la somme des quatre autres. Or on ne trouve pas, parmi les différences de différences ci-dessus, 91, 93, 95, 97, 107 : on ne peut donc faire la verticale avec quatre différences d'un signe, et une cinquième de signe contraire.

Il faut voir si l'on peut prendre trois différences avec un signe et deux avec signe contraire.

Deux différences avec le même signe donnent les résul-

tats 69, 68, 67, 62 ... 67, 66, 61 .... 65, 60 .... 59; le double de ces nombres est 138, 136, 134, 124 .... 134, 132, 122 ... 130, 120 .... 118. Otant successivement ces derniers nombres de 161, il vient 23, 25, 27, 37 .... 27, 29, 39 .... 31, 41 .... 43. Ces valeurs peuvent avoir le double signe. On ne trouve que 23, 25, 43 communs avec les valeurs des deux différences de la diagonale ajoutée à deux différences de l'horizontale; prenant + 23, il est égal à 33 + 32 + 27 — 35 — 34, et doit répondre à — 23 $= 51 - 74 = \overset{d.}{25} + \overset{d.c.}{26} - \overset{h.}{36} - \overset{h.c.}{38}$; ainsi l'une des verticales serait

$$-\overset{h.}{36}-\overset{h.c.}{38}+\overset{d.}{25}+\overset{d.c.}{26}+33+32+27-35-34$$

En prenant — 23, il répondrait à + 23 = 74 — 51; il faudrait changer tous les signes de la précédente verticale.

Venant à + 25 = 34 + 32 + 27 — 35 — 33, il répond à — 25 = 51 — 76 = 25 + 26 — 40 — 36, et l'on aurait la verticale

$$+\overset{d.c.}{26}+\overset{d.}{25}-\overset{h.c.}{40}-\overset{h.}{36}+34+32+27-35-33$$

Et changeant tous les signes, il viendrait celle que l'on a choisie.

Enfin pour + 43 = 33 + 34 + 35 — 32 — 27, il faut — 43 = + 8 — 51 = 36 — 28 — 25 — 26, et il viendrait pour verticale :

$$\overset{h.c.}{36}-\overset{h.}{28}-\overset{d.c.}{25}-\overset{d.}{26}+33+34+35-32-27$$

Il y a donc en tout trois verticales possibles, d'après le choix fait de la diagonale et de l'horizontale.

On voit comment on opèrerait si la composition de ces lignes était différente, si le carré d'équerre était autrement

formé avec les mêmes nombres, ou si l'on prenait d'autres progressions.

On s'est beaucoup étendu sur cet exemple, pour faire connaître la marche à suivre dans tous les cas semblables.

On verra (*figure* 294) le carré d'équerre au centre, et bordure régulière; les nombres des horizontale et verticale, à l'exception des angles, peuvent se placer dans leur ligne à volonté.

Le carré (*figure* 295) est remarquable : le carré de coupure a été fait par la méthode expéditive avec les 25 nombres du milieu. Il résulte qu'on a, en diagonale, outre 0, deux différences complémens l'une de l'autre : d'où il suit qu'il faut en diagonale première, seulement quatre différences, en mettant aux angles opposés les différences et complémens. La 2.e diagonale aura les mêmes quatre différences toutes avec changement de signe, plus une autre différence et son complément aux angles. Soient ces quatre différences + 36 + 39 — 37 — 38.

La 1.re horizontale aura les deux extrémités communes avec les diagonales, ce sont les angles, et de plus sept autres différences.

La 2.e horizontale aura une différence et un complément communs avec la 1.re diagonale, et sept autres différences.

La 1.re verticale aura l'angle commun avec la 1.re horizontale et la 1.re diagonale, ainsi que le complément de l'angle de la seconde diagonale, et de plus une différence et un complément de la 2.e horizontale.

La 2.e verticale aura les deux autres différences de la 1.re diagonale, dont une avec changement de signe, et de plus une différence et un complément de chaque horizontale.

On a fait ces lignes comme suit :

1.re diagonale. +40—40—37—38+36+39

2.e diagonale. +35—35+37+38—36—39

1 d. 2 d.
1.re horizontale. +40+35 . . . . +33+34—31—29—30—28—24

1 d. 1 d. c.
2.e horizontale. . . . —38—36 . +21+27—26—25+23+22+32

1 d. 2 d. c. 2 h. 2 h. c.
1.re verticale. 40—35 . . . . +21—20—19+13+14+18—32

1 d. 1 d. c. 1 h. 2 h. 2 h. c. 1 h. c.
2.e verticale. . . —37 . . —39+33+27—17+16+15—22+24

On a marqué les différences communes, ainsi que les complémens, ce qui fixe le rang de chacune de ces différences; on complète à l'ordinaire, ayant toujours soin de placer symétriquement les complémens des intersections; quant aux autres différences des horizontales et verticales entre les parties du carré de coupures, elles ont leurs complémens aux cases correspondantes, comme on le voit (*figure* 295).

On a donné le même carré avec les nombres (*figure* 296).

Il peut être utile de connaître toutes les dernières verticales que l'on peut obtenir, après avoir construit par tableau, comme ci-dessus, les deux diagonales, les deux horizontales et la 1.re verticale, afin de ne pas faire des tentatives infructueuses.

Pour cela, on remarque d'abord que les trois différences qui restent sont 15, 16, 17, ce qui donne pour leur somme, et celles de deux d'entr'elles avec un signe, et la troisième avec signe contraire, $\pm 48 \pm 14 \pm 16 \pm 18$. Les deux différences restantes de la diagonale, lesquelles doivent faire partie de la verticale, sont 37—39, ce qui donne, en changeant le signe de l'une d'elles, ± 76. Ajoutant donc ± 76 aux nombres ci-dessus, on aura 28, 58, 60, 62, 90, 92, 94, 124, en plus ou en moins. Ces derniers nombres indiquent l'addition des deux différences de la diagonale avec les trois différences restantes, pour tous les cas. Il faut, pour compléter la verticale, une différence et un complément de chaque horizontale. Si donc on combine 2 à 2 les sept différences de cette horizontale (non compris celles des angles, si l'on agit de même pour la 2.e horizon-

tale, non compris les différences de la diagonale), il faudra qu'ajoutant une différence de différence de la 1.re horizontale avec une différence de différence de la deuxième, on obtienne l'un des huit nombres qui précèdent.

La première horizontale donne pour différences de différences :

$\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm 4 \pm 5 \pm 6 \pm 7 \pm 57 \pm 58 \pm 61 \pm 62 \pm 63 \pm 64 \pm 65$

La 2.e horizontale donne :

$\pm 1 \pm 4 \pm 5 \pm 6 \pm 9 \pm 10 \pm 43 \pm 44 \pm 46 \pm 47 \pm 48 \pm 49 \pm 52 \pm 53 \pm 57 \pm 58$

Si l'on ajoute successivement chacun de ces derniers avec tous les premiers, en ne retenant que les résultats égaux à l'un des huit nombres ci-dessus, on aura toutes les verticales cherchées. D'abord on voit qu'on ne peut obtenir 124 : car les deux plus grands dans chaque horizontale, $65 + 58$, ne font que 123. On ne peut pas davantage avoir 28 : car les plus grands des petits, $7 + 10$, ne font que 17 ; de même $65 - 43 = 22$, encore trop petit. Enfin on n'aura pas 90, 92, 94, puisque les plus petits des grands $57 + 43 = 100$, et que $65 + 10 = 75$. Il restera $\pm 58 \pm 60 \pm 62$, et il vient :

6... $1 + 57 = 58$	4... $63 - 5 = 58$
2... $1 + 61 = 62$	2... $65 - 5 = 60$
2... $61 - 1 = 60$	2... $64 - 6 = 58$
4... $63 - 1 = 62$	2... $58 + 2 = 60$
2... $4 + 58 = 62$	1... $57 + 3 = 60$
2... $62 - 4 = 58$	1... $52 + 6 = 58$
2... $64 - 4 = 60$	1... $53 + 5 = 58$
3... $57 + 5 = 62$	2... $53 + 7 = 60$

Les petits nombres devant les différences indiquent pour chaque cas les combinaisons qui s'y rapportent. Ainsi 63—5, par exemple, provient de ce que 63 se trouve deux fois dans les différences de différences de la 1.re horizontale, savoir : 33+30 et 34+29; d'un autre côté, 5 est deux fois parmi les différences de différences de la 2.e horizontale, savoir : 27—22 et 32—27; et, comme chaque combinaison de 63 se compare à chaque combinaison de 5, il y aura quatre verticales pour 63—5, et ainsi des autres. Donc en tout 38 verticales, dont le nombre est double, parce qu'on peut prendre le signe ± pour chacune. Dans les différences de différences des horizontales on n'a mis qu'une seule fois les résultats, dont quelques-uns sont répétés plusieurs fois, comme on vient de le faire voir. La combinaison choisie est celle qui résulte de —76+14 (—62)+57+5, ou —37—39 (—76) +15+16—17 (+14) +33+24 (+57)+27—22 (+5)

Voici encore un exemple d'irrégularité (*figure* 297) : le carré de coupures est toujours composé des 25 nombres du milieu ; on l'a formé par la méthode expéditive. Il suit que la première diagonale a déjà les différences —4—9=—13, qui sont fixes. Il ne faut plus que 7 différences, dont la somme soit 13. La seconde diagonale a les deux différences 3+7=10, plus une différence et un complément de la première.

Les différences du carré d'intersection ont toujours les complémens aux cases symétriques ; et ceux des différences entre les cases du carré de coupures, sont aux cases opposées.

La 1.re horizontale doit avoir une différence et un complément de la 1.re diagonale, et autant de la seconde.

La 2.e horizontale aura aussi une différence et un complément de chaque diagonale.

La 1.re verticale aura une différence de la première diagonale, commune avec la 1.re horizontale : c'est l'angle commun; plus le complément de l'angle opposé de cette 1.re diagonale; de plus le complément d'une différence de la 2.e diagonale, c'est le complément de l'angle de cette 2.e diagonale; enfin deux différences de la 2.e horizontale, dont une avec signe changé.

La 2.e verticale aura le complément de la différence restante de la 1.re diagonale; la différence d'intersection des deux diagonales; le complément de la différence restante de la 2.e diagonale, et deux différences de chaque horizontale, dont une avec changement de signe.

Soient les lignes distribuées comme suit :

1.re diagonale	$(-13)+40-16+38-37-36+39-15$
2.e diagonale	$(+10)-35-34+33-\overset{1\,d.}{37}+31+17+\overset{1\,d.\,c.}{15}$
1.re horizont.	$+\overset{1\,d.}{40}-\overset{2\,d.}{35}+32-27+\overset{1\,d.\,c.}{36}-\overset{2\,d.\,c.}{17}\ .+24-28-25$
2.e horizont.	$.-\overset{1\,d.}{16}-\overset{1\,d.\,c.}{38}+\overset{2\,d.}{33}-\overset{2\,d.\,c.}{31}\ .\ .\ .\ .\ .+29-14+20-13+30$
1.re verticale.	$+\overset{1\,d.}{40}+\overset{2\,d.\,c.}{35}\ .\ .\ .\ .+\overset{1\,d.\,c.}{15}\ .-26\ .+\overset{2\,h.}{29}-19-21-23-\overset{2\,h.\,c.}{30}$
2.e verticale.	$.+\overset{2\,d.\,c.}{34}\ .-\overset{1\,d.}{37}\ .-\overset{1\,d.\,c.}{39}\ .+\overset{1\,h.}{24}\ .+\overset{1\,h.\,c.}{25}-18-22+\overset{2\,h.}{20}+\overset{2\,h.\,c.}{13}$

Il n'y a d'attention à apporter que pour le placement des différences d'intersection : les autres n'offrent point de difficulté. On voit (*figure* 298) le même carré en nombres. Cet exemple est très-remarquable, et doit servir de guide pour tous les cas semblables.

Le carré d'intersection n'est pas magique, à l'exception des diagonales ; mais les lignes symétriques donnent une somme magique par leur addition, quoiqu'elles ne soient pas magiques par elles-mêmes. Ainsi la 1.re et la 4.e horizontales, la 2.e et la 3.e, et de même la 1.re et la 4.e verticales, ainsi que les 2.e et 3.e, ont pour somme $328 = 4 \cdot 82 = 4$ couples.

Après avoir composé les deux diagonales, les deux horizontales et la 1.re verticale, il faut examiner si la 2.e verticale est possible ou non.

Supposant donc les lignes construites comme ci-dessus, à l'exception de la 2.e verticale,

La 1.re diagonale n'a que la différence $+ 39$ non employée dans les autres lignes, et qui doit faire partie de la 2.e verticale, avec signe changé.

La différence d'intersection des deux diagonales $- 37$ est aussi forcée.

La 2.e diagonale n'a que $- 34$ non compris dans les autres lignes ; et cette différence, avec changement de signe, doit aussi faire partie de la verticale. Elle aura donc déjà $- 39 - 37 + 34 = - 76 + 34 = - 42$.

Les deux différences restantes, et n'entrant dans aucune ligne, sont 18 et 22, qu'on peut prendre en plus ou en moins, ce qui donne $-42+40=2$.... $-42-40=-82$ $-42+4=-38$.... $-42-4=-46$.

Les différences non répétées de la 1.re horizontale sont + 32 — 27 + 24 — 28 — 25.

Celles de la 2.e horizontale sont — 14 + 20 — 13.

Les différences de différences de la 1.re horizontale sont les suivantes : 59, 8, 60, 57, 51, 1, 2, 52, 49, 3; celles de la seconde, 34, 1, 33.

Il faut que deux de ces différences de différences, prises l'une dans la 1.re série, l'autre dans la seconde, donnent pour somme 2, 38, 46, 82. Or on aura 1 + 1 = 2.... 3 — 1 = 2....33 + 49 = 82.

Il y aura donc 3 verticales, savoir : — 39 — 37 — 18 — 22 + 34 (+ 20 + 13 + 24 + 25). C'est celle adoptée. Puis — 42 + 40 = — 39 — 37 + 34 + 18 + 22 (+ 28 — 27 + 14 — 13). Enfin la 3.e sera — 39 — 37 + 34 + 22 + 18 (+ 28 — 25 — 14 + 13). Il pourrait se faire que l'on ne pût arriver à une seconde verticale d'après les premières lignes construites à volonté. Alors on ferait quelque changement à l'une des lignes.

Voici encore une des formes régulières du carré de 9 avec bandes isolées. Le carré de coupures a été formé par la méthode expéditive, et avec les nombres 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, 35, 38, 41, et complémens. Le carré d'intersection a été fait avec les 4 séries 1, 4, 7, 10..... 3, 6, 9, 12..... 70, 73, 76, 79.... 72, 75, 78, 81. Ces deux dernières sont complémens des deux premières. (*Planche* XXXVIII *bis*, *figure g.*)

Il reste les nombres et les différences

2 + 39 — 80	27 + 14 — 55
13 + 28 — 69	28 + 13 — 54 (20)
15 + 26 — 67 (1)	30 + 11 — 52
16 + 25 — 66 (10)	31 + 10 — 51 (25)
18 + 23 — 64	33 + 8 — 49
19 + 22 — 63	34 + 7 — 48
21 + 20 — 61 (13)	36 + 5 — 46
22 + 19 — 60	37 + 4 — 45
24 + 17 — 58	39 + 2 — 43
25 + 16 — 57	40 + 1 — 42 (26)

Comme chaque diagonale a un couple dans le carré de coupures, et un autre du carré d'intersection, outre le moyen qui leur est commun, il ne faut plus que 4 différences à la 1.re diagonale, et la seconde a les complémens de ces 4 différences. Soit la 1.re diagonale 17+14—20—11 : on fera 4 groupes de cinq différences, tels que deux d'entr'eux contiennent deux différences de la diagonale, dont une avec changement de signe. Ces groupes auront 2 différences contre 3 : donc les 8 plus grandes surpasseront ou égaleront les 12 plus petites. La somme des 8 grandes est 202; celle des 12 petites est 108. Mais 202—108=94, dont la moitié 47 doit être ajoutée aux petites, et diminuée des grandes différences. Qu'on fasse passer, par exemple, 20, 25, 26=71, des grandes parmi les petites, et 13, 10, 1 des petites parmi les grandes : on aura 71—24=47. On peut faire les groupes

d. d. c. d. d. c.
17+20+8—23—22.......—11—14—7+19+13....39
+28—26—25—16.....10+1—5—4—2

Si l'on choisit l'un des groupes contenant deux différences de la diagonale, comme 20+17+8—23—22, alors

+ 17, ayant conservé son signe, sera à l'angle de la 1.re diagonale, ou le nombre 24 qui lui répond. Au contraire + 20, dont le signe est changé, ou le nombre 21, sera à l'angle inférieur de la 1.re verticale. Quant à 33, 63, 64, dont les différences sont + 8—22—23, ils se placeront sur la 1.re verticale, vis-à-vis des bandes du carré de coupures. Le groupe +19+13—14—11—7 aura — 11, ou le nombre 52 en diagonale, et — 14 ou 55 à la 2.e diagonale. Les complémens se mettent comme on voit à la figure. Les deux autres groupes se mettent arbitrairement dans l'une ou l'autre des deux horizontales ou des deux verticales restantes, c'est-à-dire un dans chaque nature de lignes. Les complémens de chacun donnent les deux autres lignes horizontale et verticale.

On terminera ici ce qui concerne le carré de 9; mais, si l'on est loin d'avoir donné toutes les formes dont il est susceptible, il en a été dit assez pour lever tout embarras et toute difficulté.

ARTICLE X.

CARRÉ DE 10.

Qu'on forme le carré d'équerre par les 18 premiers et les 18 derniers nombres, et le carré d'intersection par les 8 suivans et les 8 précédens. La 1.re diagonale, passant par les diagonales de ces deux carrés, est régulière. Quant à la 2.e, elle a déjà les différences de 8 et 6, qui sont + 42,5 + 44,5 = 87. On composera, avec les 24 différences des nombres du milieu de la progression, 4 groupes de 6 différences. Les 12 plus grandes, de 12,5 à 23,5, donnent pour somme 216. Les 12 plus petites, de 0,5 à

11,5, ont 72 pour somme : 216—72=144; donc il faut augmenter et diminuer de 72 les sommes ci-dessus. Qu'on fasse passer, par exemple, 1,5+2,5+5,5+7,5+9,5+10,5 =37 parmi les grandes; et 14,5+16,5+17,5+18,5+19,5 +22,5=109 parmi les petites : on aura 109—37=72; et les groupes pourront être

23,5 + 10,5 + 9,5 — 22,5 — 6,5 — 14,5
20,5 + 12,5 + 13,5 — 16,5 — 11,5 — 18,5
15,5 + 5,5 + 2,5 — 19,5 — 3,5 — 0,5
21,5 + 7,5 + 1,5 — 17,5 — 8,5 — 4,5

Il faut dans chaque groupe prendre deux différences, dont une avec changement de signe, et telles que leur somme soit —87. Soit donc la 2.e diagonale—22,5—10,5 —16,5—12,5—3,5—5,5—8,5—7,5. On distribuera les groupes, savoir : deux en horizontale et deux en verticale, de manière que les 8 différences négatives ci-dessus soient en diagonale (*figure* 299, *planche* XLII). On a mis les nombres au dessous des différences, pour ne pas multiplier les figures, et mieux faire ressortir la manière d'opérer.

On voit (*figure* 300) avec quelle facilité on peut passer du carré à équerre au carré à bordure double. Il y a toujours 3 carrés magiques en réunissant les parties séparées du carré d'intersection.

La croix (*figure* 301) se déduit avec la même facilité, soit du carré d'équerre (*figure* 299), soit du carré à bordure (*figure* 300). Ici le carré de coupures est distribué

aux angles; et la 2.e diagonale passe, ainsi que la première, et comme dans le carré à bordures, par les diagonales des carrés de coupures et d'intersection.

La forme régulière (*figure* 302) n'est encore qu'une modification des précédentes; et cette figure, où l'on voit un châssis, se déduit de l'une ou de l'autre des 3 précédentes.

Quant à la forme (*figure* 303), elle exige d'autres précautions. On a conservé les mêmes carrés de coupure et d'intersection. Il était inutile de remplir les vides de ces carrés : on voit mieux ressortir les différences.

D'abord les nombres + 32,5 — 37,5 donnent — 5 à la 1.re diagonale, et — 32,5 + 37,5 ont + 5 à la 2.e, pour différences fixes. Il faut encore 8 différences à chaque diagonale; la seconde est composée des complémens de la première; chaque ligne doit avoir une différence de la diagonale avec son signe, et une autre avec changement de signe; elle n'aura que 6 différences, puisqu'elle comprendra déjà un côté du carré d'intersection, lequel est magique.

On peut faire ces lignes comme suit :

1.re diag. (—5)+23,5+22,5—21,5—20,5+19,5+15,5—17,5—16,5
2.e diag. (+5) et complémens de la première.

1.re hor.	.	.	d. —21,5	.	.	.	d. c. +17,5	.	+ 9,5	— 8,5	+ 4,5	— 1,5
2.e hor.	.	.	.	d. —20,5	d. c. —19,5	.	.	.	+12,5	+11,5	+10,5	+ 5,5
1.re vert.	d. +23,5	.	.	.	.	d. c. —15,5	.	.	— 6,5	— 3,5	+ 2,5	— 0,5
2.e vert.	.	d. +22,5	.	.	.	.	.	d. c. +16,5	+ 7,5	—13,5	—14,5	—18,5

Il n'y a plus qu'à substituer les nombres aux différences, comme on le voit à la figure.

Pour obtenir la 2.e verticale, les autres lignes étant formées, on remarquera que les différences restantes de la diagonale sont +22,5—16,5, ce qui donne ± 39.

Il reste les 4 différences non employées 18,5, 14,5, 13,5, 7,5, qu'on peut prendre en plus ou en moins. Leur somme est, en ne s'occupant que des valeurs positives, 54, plus grand que 39. Si l'on ôte successivement le double de chaque différence, on aura 54—15 =39 : donc 18,5+14,5+13,5—7,5=39, et il viendra la 2.e verticale ci-dessus.

Si l'on voulait obtenir tous les systèmes de verticales, on agirait sur les deux verticales. Ainsi, la diagonale ayant de reste +23,5+22,5+15,5—16,5, les différences de différences seraient ±1±8±40±7±39±32. Il faudrait que sur les 8 différences restantes quatre d'entr'elles fussent égales à l'une de ces différences de différences, et les 4 autres à une autre différence de différences, mais sous cette condition, que si l'une des sommes est ±1, l'autre serait ±32; si ±8, l'autre ±39; enfin si ±7, l'autre ±40 : autrement on aurait une même différence de diagonale dans chaque somme, ce qui ne peut être. Ainsi, par exemple, 18,5+14,5+6,5+0,5=40; et 13,5 +3,5—7,5—2,5=7; de même 13,5+14,5+18,5—7,5 =39; et 6,5+3,5+0,5—2,5=8 : c'est la valeur des deux lignes adoptées. Enfin 7,5+6,5+0,5—13,5=1, et 18,5 +14,5+2,5—3,5=32. Il serait possible que l'on eût une des différences de différences sans pouvoir obtenir la correspondante : ainsi 18,5+3,5—14,5—6,5=1; mais on ne peut faire 32 avec les 4 différences restantes 13,5+7,5 +2,5+0,5. Il faudrait donc combiner entr'elles 4 des 8 différences, sans que leur somme fût différente de 1, 7, 8, 32, 39, 40, et voir si les 4 autres restantes combinées entr'elles peuvent donner les différences de différences correspondantes. On aurait bien d'autres combinaisons si la diagonale variait, et que l'on formât, pour chaque cas, les différences de différences deux à deux, pour les comparer à de nouvelles horizontales formées avec les 16 différences restantes.

Dans le carré (*figure* 304, *planche* XLIII) le carré

d'intersection a été fait avec les 18 premiers et les 18 derniers nombres; celui de coupures, avec les 4 suivans et les 4 précédens. Voici les tableaux d'après lesquels a été fait le carré d'intersection.

1	2	3	4	5	6	88	6	6	88	6	88
6	2	4	3	5	1	0	0	94	94	0	94
6	5	4	3	2	1	12	82	82	82	12	12
1	5	4	3	2	6	82	12	12	12	82	82
6	2	3	4	5	1	94	94	0	0	94	0
1	5	3	4	2	6	6	88	88	6	88	6

Comme 83 remplace 19, dans le choix des 18 derniers nombres du carré d'intersection, on aura $83-19=64$ à ajouter aux multiples du 2.e tableau, 18, 24, 30. Ces multiples deviendront donc 82, 88, 94; un couple sera $0+94=94$. Ceux du 1.er tableau sont $1+6=7$, et $94+7=101$, valeur d'un couple du carré total.

Le carré de coupures a été construit par la méthode expéditive. On a omis les différences du carré d'intersection, sauf celles des diagonales, qui sont complémens l'une de l'autre, hors le carré de coupures, dans lequel elles ont chacune un couple, savoir : $24+77$, pour la première, et $25+76$, pour la seconde. La première a déjà, du carré d'intersection, les différences $+42{,}5-47{,}5+46{,}5-39{,}5=2$; il faut encore 4 différences dont la somme soit $=-2$: on a choisi $+18{,}5-19{,}5+20{,}5-21{,}5=-2$. On a fait 6 groupes de 4 différences, dont deux comprendront chacun une des 4 différences de la 1.re diagonale et le complément d'une autre; l'un de ces groupes sera en horizontale, et l'autre en verticale. Les différences, en tout, sont de

0,5 à 23,5; les 12 plus grandes ont pour somme 216; les 12 plus petites, 72. Il faut donc augmenter celles-ci de $\frac{216-72}{2}=\frac{144}{2}=72$. On a fait passer 13,5 + 14,5 + 19,5 + 20,5 + 17,5 + 22,5 = 108 des grandes parmi les petites, et 11,5 + 8,5 + 7,5 + 4,5 + 3,5 + 0,5 = 36 des petites parmi les grandes, et 108 — 36 = 72. Les groupes ont été faits comme suit.

Horizontaux.	15,5 + 12,5 — 14,5 — 13,5
	11,5 + 8,5 — 9,5 — 10,5
	23,5 + 16,5 — 19,5 — 20,5
Verticaux...	18,5 + 21,5 — 17,5 — 22,5
	7,5 + 4,5 — 6,5 — 5,5
	3,5 + 0,5 — 2,5 — 1,5

On voit le dernier horizontal et le premier vertical contenir chacun une différence de la diagonale et un complément. Il est plus convenable de former d'abord les 6 groupes, et la diagonale ensuite. Il est facile de placer les différences. On peut voir la figure.

Les diagonales (*figure* 305) ont un couple aux angles du carré d'intersection, et un autre couple dans le carré de coupures. Les différences de la 2.e sont les complémens de la 1.re pour les 6 différences restantes. Cette première a déjà — 47,5 + 46,5 = — 1. Il faudra, après avoir formé les groupes, prendre deux différences, dont une avec changement de signe, de l'un des 6 groupes, et agir de même pour un autre groupe, de manière que la somme de ces différences et complémens soit égale à 1. On peut former ces groupes comme suit, avec les 24 différences restantes.

1.re horizontale.	— 5,5— 6,5+ 7,5+ 4,5
3.e horizontale.	+20,5—23,5+16,5—13,5
6.e horizontale.	+ 3,5+ 0,5— 2,5— 1,5
1.re verticale...	+19,5—15,5—14,5+10,5
2.e verticale...	+22,5—21,5+17,5—18,5
3.e verticale...	+12,5—11,5— 9,5+ 8,5
	3 h. 2 v. 3 h.c. 2 v.c.
1.re diagonale..	+20,5—21,5—16,5+18,5=1

On voit que la diagonale n'a été formée qu'après avoir composé les autres lignes. On aurait pu commencer par elle, et faire les groupes en conséquence. Il y aurait bien d'autres combinaisons pour obtenir 1 : par exemple, +20,5 —16,5—7,5 + 4,5..... + 5,5 + 4,5—19,5 + 10,5, etc. Il suffit qu'il y ait l'unité positive dans la composition de 4 différences prises de deux groupes, l'une avec son signe, l'autre avec signe changé ; mais les horizontales et les verticales changeront de position : ce sera toujours la 3.e horizontale et la 2.e verticale qui auront les différences de la diagonale, comme il vient d'être dit.

Il n'y a plus de difficulté à placer les différences, et à leur substituer les nombres qui leur correspondent.

Voici une croix irrégulière ne partageant pas le carré en 4 parties égales (*figure* 306). Le carré de coupures a été fait avec les 32 premiers et les 32 derniers nombres, et par le moyen des différences. Il suffit des 4 premières horizontales, les 4 dernières ayant leurs différences symétriquement placées. Cette méthode est la plus facile de toutes ; elle s'applique très-bien aux racines divisibles par 4. Il suffit qu'on puisse former les 4 premières verticales avec deux différences de chaque horizontale, dont une

avec changement de signe, dans le cas présent, et, en général, moitié des horizontales, et ensuite moitié des verticales, sous la condition ci-dessus. Voici les horizontales et les verticales choisies pour le carré de 8 de la figure 306.

+41,5—36,5+38,5—35,5—40,5+37,5—39,5+34,5
+18,5—23,5+21,5—24,5—19,5+22,5—20,5+25,5
+49,5—44,5+46,5—43,5—48,5+45,5—47,5+42,5
—33,5+28,5—30,5+27,5+32,5—29,5+31,5—26,5
+26,5—31,5+29,5—32,5—27,5+30,5—28,5+33,5
—42,5+47,5—45,5+48,5+43,5—46,5+44,5—49,5
—25,5+20,5—22,5+19,5+24,5—21,5+23,5—18,5
—34,5+39,5—37,5+40,5+35,5—38,5+36,5—41,5

Ce carré est le plus simple de tous. Voici les tableaux qui en résulteraient :

1.er TABLEAU.

1	7	4	6	3	5	2	8
8	2	5	3	6	4	7	1
1	7	4	6	3	5	2	8
4	6	1	7	2	8	3	5
8	2	5	3	6	4	7	1
5	3	8	2	7	1	6	4
4	6	1	7	2	8	3	5
5	3	8	2	7	1	6	4

2.e TABLEAU.

8	80	8	80	88	8	88	8
24	72	24	72	64	24	64	24
0	88	0	88	96	0	96	0
80	16	80	16	16	72	16	72
16	80	16	80	72	16	72	16
88	0	88	0	0	96	0	96
72	24	72	24	24	64	24	64
80	8	80	8	8	88	8	88

Il n'est guère possible de prévoir de semblables tableaux.

Il est clair qu'il ne peut y avoir de multiples pour les 32 premiers nombres, que de 0 à 24, puisque 24+8=32. Les complémens étant de 69 à 100, on aura 4 fois 64, multiple avec les nombres 5, 6, 7, 8; puis 72, 8 fois multiple; il en est de même de 80 et 88; enfin 96 sera 4 fois multiple avec 1, 2, 3, 4.

Le tableau des différences est susceptible d'une foule de variations. On doit remarquer qu'on ne pourrait faire 3 différences égales à cinq : car les 12 plus grandes valent 528, et les 20 plus petites ont pour somme 560. On est donc obligé de former les groupes de manière à ce qu'ils contiennent 4 différences positives et 4 négatives.

Revenant au carré de la figure 306, on voit que chaque diagonale a 6 nombres communs avec ceux du carré de coupures, et que ces 6 nombres font 3 couples. La première a de plus la différence forcée — 27,5, et la seconde — 32,5. Soient les lignes des différences

1.re diagon.	(—27,5)+13,5+16,5—2,5		
2.e diagon.	(—32,5)	.	. +2,5+15,5+14,5
horizontale.	+13,5—16,5	.	+15,5—14,5+17,5—12,5—11,5+10,5+9,5+7,5
verticale.	. +16,5+2,5	.	—14,5+ 8,5— 6,5— 5,5+ 4,5—0,5—1,5—3,5

Il n'était pas indispensable de faire le carré de 8, comme il a été construit, par la méthode expéditive : on aurait toujours eu 3 couples et une différence forcée. Il est aisé de placer les différences communes. Les autres se mettent dans leurs lignes à volonté. Les complémens achèvent le carré.

ARTICLE XI.

CARRÉ DE 12.

On suppose le carré de coupures de 64 cases, et formé par les 32 premiers et les 32 derniers nombres. On peut le composer de 4 carrés magiques, en prenant 8 nombres et leurs complémens pour chacun (*fig.* 307, *pl.* XLIII). Le carré d'intersection comprend les 16 nombres du milieu. Il suit de la construction qui précède, que la 2.e diagonale aura déjà la diagonale d'un des carrés partiels de celui de coupures, et il ne faudra plus que 8 différences La première diagonale est magique, ayant, pour la composer, les diagonales des carrés de coupures et d'intersection.

La 2.e diagonale étant faite, chacune des 2 premières horizontales et des 2 premières verticales aura deux différences de la diagonale, dont une avec signe changé; ou bien on fera 4 groupes de 8 différences, et la diagonale se composera de deux différences de chaque groupe, dont une avec changement de signe. Soient les lignes, en faisant d'abord la diagonale,

2.e DIAGONALE.

+39,5+38,5—37,5—36,5—35,5—34,5+33,5+32,5

1.re HORIZONTALE.

d. d. c.
+39,5—38,5+31,5—30,5—29,5+28,5—27,5+26,5

2.e HORIZONTALE.

d. c. d.
+25,5—24,5+37,5—36,5—23,5+22,5—21,5+20,5

1.re VERTICALE.

$$+19{,}5-18{,}5-17{,}5+16{,}5+\overset{\text{d. c.}}{35{,}5}-\overset{\text{d.}}{34{,}5}-15{,}5+14{,}5$$

2.e VERTICALE.

$$+13{,}5-12{,}5-11{,}5+10{,}5-\ 9{,}5+\ 8{,}5+\overset{\text{d.}}{33{,}5}-\overset{\text{d. c.}}{32{,}5}$$

On voit avec quelle promptitude les différences donnent les parties du carré. On en déduirait aisément le carré à croix, mais il ne serait pas aussi facile de ramener celui-ci au carré à équerre.

Il est indifférent de placer la 2.e horizontale au lieu de la 3.e; les complémens se disposeraient autrement. Il en est de même des horizontales.

Qu'on veuille connaître toutes les secondes verticales, en supposant fixes la diagonale, les deux horizontales et la première verticale : il ne reste en diagonale que $+33{,}5$ $+32{,}5$, ce qui donne ± 1 pour les différences de différences. On a encore les différences 8, 9, 10, 11, 12, 13. Il s'agit de les combiner avec les signes plus ou moins, de sorte que la somme soit ± 1. Or on peut toujours supposer une de ces différences positive, puisque à la fin, en changeant tous les signes, on l'aurait négative. Soit donc 13 positive : on aura $13 \pm 1 = 14 = 12$. Il suffit donc de combiner les 5 différences restantes de manière à avoir 12 ou 14. D'abord les 4 plus petites ont pour somme 38; la restante, jointe à 14, ne donnerait que 26 : ainsi il en faut trois d'un signe et deux de l'autre. La somme des cinq différences est 50. Les différences, deux à deux, donnent 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23. Le double est 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46. Otant ces derniers nom-

bres de 50, on a $50-36=14 \ldots 50-38=12$; et, comme 19 s'obtient par $11+8$ et $9+10$, il suit qu'il y aura trois verticales,

$$13{,}5+8{,}5+10{,}5-9{,}5-11{,}5-12{,}5\ (+1)$$
$$13{,}5+9{,}5+10{,}5-12{,}5-11{,}5-8{,}5\ (-1)$$
$$13{,}5+8{,}5+11{,}5-12{,}5-10{,}5-9{,}5\ (-1)$$

La première est celle que l'on a adoptée; alors $+1$ est $+33{,}5-32{,}5$; dans les deux autres l'on a $-1=32{,}5-33{,}5$.

Il en serait bien autrement si l'on suppose les deux horizontales et les deux verticales construites, et si l'on cherche la diagonale. Comme elle doit avoir deux différences de chaque ligne, dont une avec changement de signe, il y aurait à opérer comme suit : on prendrait les différences de différences de ces 4 lignes avec le double signe, et il faudrait qu'une de ces différences de différences, prise dans chaque ligne, donnât une somme $=0$; et, pour n'en point échapper, on comparerait, par exemple, toutes les différences de différences de la 1.re horizontale, et successivement toutes celles de la seconde; on agirait de même sur les deux verticales, et la question se réduirait à trouver deux résultats pareils. Comme chacun aura le double signe, on ne serait pas embarrassé. Or la première horizontale aura 24 différences de différences, et la 2.e autant, ce qui donnera 24^2 pour le nombre des résultats de la comparaison de ces lignes. Il en sera de même pour les deux verticales : donc en tout $24^2 \cdot 2$. Mais, attendu le double signe, la comparaison d'une différence de différences de la 1.re horizontale avec une de la 2.e donnera quatre résultats qu'on doit réduire à deux, parce que l'un des signes, combiné avec les ré-

sultats de la comparaison des différences de différences des verticales, doit être pris en sens contraire de ceux des horizontales : ainsi ce sera quatre nouvelles combinaisons. Il viendrait donc en tout $24^2 \cdot 8$ pour les différens résultats définitifs. Il ne faut pas conclure qu'il y aurait ce nombre de diagonales, mais on aurait ce nombre d'opérations. Il est vrai qu'il en est quelques-unes qui deviennent inutiles, mais dont l'inutilité ne peut se reconnaître qu'à la fin. On va donner les différences de différences des horizontales et des verticales.

Ces lignes sont :

1.re HORIZONTALE.

+39,5—38,5+31,5—30,5—29,5+28,5—27,5+26,5

2.e HORIZONTALE.

+25,5—24,5+37,5—36,5—23,5+22,5—21,5+20,5

1.re VERTICALE.

+19,5—18,5—17,5+16,5—35,5—34,5—15,5+14,5

2.e VERTICALE.

+13,5—12,5—11,5+10,5— 9,5+ 8,5+33,5—32,5

Les différences de différences de ces lignes sont :

1.re HORIZONTALE.

1 2 3 5 8 9 11 13 54 56 57 58 59 61 62 65 67 69 70 78

2.e HORIZONTALE.

1 2 3 5 12 13 15 17 42 44 45 46 47 49 50 57 59 61 62 74

1.re VERTICALE.

1 2 3 5 16 17 19 21 30 32 33 34 35 37 38 49 51 53 54 70

2.e VERTICALE.

1 2 3 5 18 20 21 22 23 25 26 41 43 45 46 66

On n'a mis ici que les différences de différences qui ne sont pas les mêmes; mais, comme on obtient ces différences de différences de plusieurs manières, il faudra y avoir égard. Voici quelques exemples d'opérations. Soit 1 de la 1.re horizontale comparé à 5 de la seconde: on aura $\pm 1 \pm 5$, ce qui donne $\pm 6 \pm 4$. Il est inutile de s'occuper des signes de ces deux derniers nombres. Il faut donc obtenir 6 ou 4 par la comparaison d'une différence de chaque verticale. Le premier nombre sera toujours pris dans la 1.re verticale, et l'on aurait $1+3=4$.... $1+5=6$... $1-5=-4$.... $2+2=4$.... $3+1=4$... $3+3=6$.... $5-1=4$.... $5+1=6$... $16-20=-4$... $16-22=-6$.... $17-21=-4$..... $17-23=-6$...... $19-23=-4$..... $19-25=-6$..... $21-25=-4$..... $30-26=4$.... $32-26=6$... $35-41=-6$.... $37-43=-6$... $37-41=-4$.... $49-43=6$.... $49-45=4$.... $51-45=6$.... $70-66=4$. On aura donc 24 résultats pour la combinaison 1 et 5 des deux horizontales. Or 1 de la 1.re horizontale ne provient que des différences $30{,}5-29{,}5$, dont l'une a son signe changé. 5 de la 2.e horizontale résulte de $25{,}5-20{,}5$: 1 et 5 ne se trouvent qu'une fois dans leur ligne. Si l'on prend aussi 1 et 5 aux verticales, on aura $1=18{,}5-17{,}5$.... $5=13{,}5-8{,}5$. Mais on obtient le même résultat de 4 et 6 en prenant 1 dans la 2.e verticale, et 5 dans la 1.re. Alors $1=12{,}5-11{,}5$, et $5=19{,}5-14{,}5$; et il viendrait les 4 diagonales

$$\pm(30{,}5-29{,}5+25{,}5-20{,}5+17{,}5-18{,}5+8{,}5-13{,}5)$$
$$\pm(30{,}5-29{,}5+25{,}5-20{,}5+11{,}5-12{,}5+14{,}5-19{,}5)$$
$$\pm(30{,}5-29{,}5-25{,}5+20{,}5+17{,}5-18{,}5+13{,}5-8{,}5)$$
$$\pm(30{,}5-29{,}5-25{,}5+20{,}5+11{,}5-12{,}5+19{,}5-14{,}5)$$

Comme on peut changer tous les signes, ainsi que l'indique le double signe ± devant les diagonales, il en viendrait 8.

Il suffit d'avoir fait voir comment on obtiendrait toutes les diagonales lorsqu'on a déterminé les deux horizontales et les deux verticales.

Le carré (*figure* 308) conserve pour son carré de coupures et celui d'intersection les mêmes nombres que le précédent de la figure 307. La première diagonale est encore magique, passant par les diagonales des carrés de coupures et d'intersection. Quant à la seconde, elle a déjà quatre différences forcées tirées des carrés particls : ce sont —71,5—62,5—59,5—55,5=—249. Les horizontales et verticales, ayant déjà un côté du carré d'intersection, n'ont besoin que de huit différences; et parmi ces huit différences il y en aura deux de la diagonale, dont une avec signe changé. On peut, ici, faire d'abord la diagonale, qui doit avoir pour somme 249. Soient ces lignes :

2.e diag. +39,5+38,5+37,5+36,5+35,5+34,5+14,5+12,5
d. d. c.
1.re horiz. —33,5—32,5+31,5+36,5—30,5+29,5—14,5+13,5
d. d. c.
2.e horiz. +24,5—28,5—27,5+26,5—25,5+34,5+ 8,5—12,5
d. c. d.
1.re vert. —39,5—23,5+22,5+21,5+35,5—19,5+18,5—15,5
d. c. d.
2.e vert. +17,5—38,5+37,5—20,5+16,5—10,5—11,5+ 9,5

Veut-on avoir la 2.e verticale, les quatre autres lignes étant déterminées? La diagonale a encore + 38,5+37,5, qui doivent faire partie de la verticale, en changeant un signe, ce qui donne ± 1. Les différences restantes sont 9,5, 10,5, 11,5, 16,5, 17,5, 20,5, dont la somme, en pre-

nant ces différences en plus et en moins, doit être $= \pm 1$; mais on peut combiner deux d'entre elles avec $\pm$. Ainsi 17,5 et 20,5 donneront $\pm 38 \pm 3$: à quoi ajoutant ± 1, il viendra $\pm 39 \pm 37 \pm 4 \pm 2$. Alors la somme des quatre différences 9,5, 10,5, 11,5, 16,5, doit être $\pm 39 \pm 37 \pm 4 \pm 2$; les différences de ces différences deux à deux deviendraient $\pm 20 \pm 1$. . . . $\pm 21 \pm 2$. . . . $\pm 26 \pm 7$. . . . $\pm 22 \pm 1$. . . . $\pm 27 \pm 6$. . . . $\pm 28 \pm 5$.

Si l'on prend les premières différences, il faut prendre les dernières; les secondes doivent s'ajouter aux pénultièmes, et celles du milieu ensemble. Il faut donc disposer ces différences ainsi :

$\pm 20 \pm 1$. . . . . $\pm 21 \pm 2$. . . . . $\pm 26 \pm 7$
$\pm 28 \pm 5$. . . . . $\pm 27 \pm 6$. . . . . $\pm 22 \pm 1$

on aura $5-1=4$. . . . $6-2=4$. . . . $26-22=4$. Ainsi on aura la verticale unique donnée ci-dessus.

La 1.re diagonale est encore magique (*figure* 309); quant à la seconde, elle a les différences forcées $-64{,}5 -66{,}5 + 69{,}5 - 48{,}5 - 50{,}5 + 53{,}5 = -107$, plus le couple $68 + 77$ du carré d'intersection. Il ne faut plus que quatre différences dont la somme soit $= 107$. La 2.e horizontale et la 2.e verticale auront deux différences de la diagonale, dont une avec signe changé. Soient ces lignes

2.e diag.	+39,5	+38,5	+37,5	— 8,5				
1.re horiz.	+36,5	—35,5	—34,5	+33,5	—32,5	+31,5	+30,5	—29,5
		d.		d. c.				
2.e horiz.	—28,5	+38,5	—27,5	+ 8,5	+26,5	+25,5	—18,5	—24,5
1.re vert.	+23,5	—22,5	—21,5	+20,5	+19,5	—17,5	—16,5	—14,5
	d. c.		d.					
2.e vert.	—39,5	+13,5	+37,5	+12,5	+11,5	—15,5	—10,5	— 9,5

Pour avoir la 2.e verticale, la diagonale ayant 39,5 + 37,5, les différences de différences seront ± 2; les deux différences 15,5 et 13,5 donnent ± 29 ± 2 : donc, ajoutées à ± 2, on aura ± 31 ± 27 ± 4 ± 0. Les différences restantes sont 9,5, 10,5, 11,5, 12,5; on ne peut en ajouter 3 et soustraire la 4.e : car 10,5 + 11,5 + 12,5 — 9,5 = 25 plus petit que 27 et 31. Faisant donc les différences de différences 2 à 2, on aurait ± 20 ± 1.... ± 21 ± 2.... ± 22 ± 3.... ± 22 ± 1.... ± 23 ± 2.... ± 24 ± 1, qu'on doit arranger comme suit :

± 20 ± 1...... ± 21 ± 2...... ± 22 ± 3
± 24 ± 1...... ± 23 ± 2...... ± 22 ± 1

Ce qui donne + 1 — 1 = 0.... 24 — 20 = 4.... 2 + 2 = 4.... 2 — 2 = 0.... 22 — 22 = 0.... 3 + 1 = 4, ce qui fournit deux verticales.

± (15,5 — 13,5 — 39,5 + 37,5 + 11,5 — 9,5 — 12,5 + 10,5)
± (38,5 — 37,5 + 15,5 — 13,5 — 12,5 — 11,5 — 9,5 + 10,5)

Dans la première verticale on peut intervertir les signes des quatre dernières différences sans toucher aux premières, et cela arrive lorsque 0 fait partie des différences de différences.

Voici encore une forme très-irrégulière du carré de 12, (*figure* 309 *bis*). Le carré de coupures a été fait avec les 32 premiers nombres et complémens; celui d'intersection avec les huit suivans et leurs complémens; la première diagonale a déjà les différences forcées du carré de coupures — 63,5 + 52,5 + 61,5 + 70,5 = + 121. Il lui faut encore huit différences dont la somme soit — 121. La seconde

diagonale a déjà les couples 137 + 8 et 130 + 15, et de plus trois différences du carré de coupures —51,5 + 44,5 + 42,5 = + 35,5; enfin trois différences du carré d'intersection —38,5 + 33,5 — 39,5 = —44,5, ce qui donne 35,5 — 44,5 = —9. Il lui faut donc encore deux différences dont la somme soit + 9. On a construit les carrés de coupures et d'intersection par la méthode expéditive, mais on a retourné le dernier. Dans sa position ordinaire on aurait eu les différences de 105, 107 et 109, ou —32,5 — 34,5 — 36,5 = —103,5, lesquelles, ajoutées à + 35,5, auraient donné pour somme —103,5 + 35,5 = —68. Or, parmi les différences restantes, les plus grandes sont celles de 41 et 42, ou 31,5 + 30,5 = 62, quantité plus petite que 68. On n'aurait donc pas pu terminer le carré. Cette remarque est essentielle : car on éprouve souvent l'obstacle ci-dessus évité, dans les figures irrégulières. Soient les lignes, savoir :

1.re diagonale. (+121) —31,5—30,5—29,5—28,5—27,5+25,5+24,5—23,5

2.e diagonale. (— 9) . . . . +26,5—17,5

1.re horizontale. —31,5 [1 d.] —22,5—21,5+20,5+19,5—14,5 . +23,5 [1 d. c.] +26,5 [2 d.]

2.e horizontale. +18,5+16,5+15,5+13,5—27,5 [1 d.] — 5,5—24,5 [1 d. c.] — 6,5

1.re verticale. —12,5—11,5—10,5+28,5 [1 d. c.] — 9,5+25,5 [1 d.] — 8,5— 1,5

2.e verticale. + 7,5—30,5 [1 d.] +29,5 [1 d. c.] + 4,5+ 3,5+ 2,5+ 0,5 . . —17,5 [2 d.]

On voit que chaque horizontale ou verticale contient une différence de la 1.re diagonale et le complément d'une autre; de plus la 1.re horizontale et la dernière verticale comprennent chacune une des deux différences de la 2.e horizontale. Toutes ces lignes ont, au reste, deux couples, puisqu'elles ont un côté du carré d'intersection, ce qui a réduit à 8 le nombre de leurs différences.

Il n'y a plus de difficulté à terminer le carré comme le donne la figure 309 *bis*.

Pour obtenir la 2.e verticale, les autres lignes étant construites, on remarque qu'elle a déjà — 17,5 forcé; plus il reste de la 1.re diagonale les différences — 30,5 — 29,5, dont la différence de différences $= \pm 1$, laquelle ajoutée à — 17,5 donne pour somme — 16,5 ou — 18,5. Il reste les différences non employées 0,5..... 2,5...... 3,5...... 4,5...... 7,5. Il faut que la somme de ces cinq différences soit + 16,5 ou + 18,5 : il n'y a que + 7,5 + 4,5 + 3,5 + 2,5 + 0,5 qui satisfasse; il n'y aura point de différence négative. Cette somme est + 18,5 : donc il ne peut y avoir qu'une seule verticale, qui est celle donnée ci-dessus.

Toutes les fois qu'une racine se divise par 4, on peut avoir quatre carrés de même valeur. Ainsi pour 12 on aurait quatre carrés de trente-six cases formés avec suite de nombres et complémens. Il n'est pas même nécessaire que les nombres se suivent : car on peut avoir plusieurs séries, pourvu que dans chaque carré se trouvent les complémens des dix-huit nombres choisis. Cela a été détaillé ailleurs. Chaque carré partiel peut avoir une forme parti-

culière. On va donner une de ces figures. L'un des carrés sera à bordure, un autre à croix, un 3.e à châssis, et le 4.e à bandes. (*Planche* XXXVIII *bis*, *figure h.*)

Le carré de coupures a été construit par la méthode expéditive dans les quatre carrés partiels; il a suffi d'ajouter 18 aux nombres d'un carré plus petits que 73, et de retrancher 18 des nombres plus grands, pour passer d'un carré à un autre suivant. C'est ainsi que du carré à bordure on a obtenu sur le champ celui à croix et celui à châssis; pour le 4.e carré à bandes on a toujours conservé le même carré de coupures construit, en ajoutant et soustrayant 54 d'après le premier carré; mais il y a quelque précaution à prendre pour avoir le carré total. D'abord les diagonales ont déjà un couple chacune dans le carré de coupures. Il faut encore quatre différences dont la somme serait = 0. Les nombres restans sont de 63 à 82, et leurs différences de 0,5 à 9,5 én plus et en moins. Ayant choisi 9,5+8,5—7,5—6,5—5,5+1,5 pour la 1.re verticale, et
v. v. c.
9,5—8,5+4,5—3,5—2,5+0,5 pour la 1.re horizontale, qui aura deux différences de la verticale, dont une avec changement de signe, lesquelles seront les différences d'intersection, il faudra pour la 1.re diagonale deux différences de l'horizontale, dont une avec signe changé, et aussi deux de la verticale. Il est inutile de s'occuper de la 2.e diagonale, qui dépend de la 1.re.

Les différences de la 1.re horizontale sont 4,5 + 0,5 — 3,5 — 2,5, et celles de la verticale — 7,5 — 6,5 — 5,5 + 1,5, non compris celles d'intersection. Prenant les différences de différences, on aura pour la 1.re verticale :

$$\pm 1 \pm 2 \pm 9 \pm 1 \pm 8 \pm 7$$

Et pour la 1.re horizontale,

$$\pm 4 \pm 8 \pm 7 \pm 4 \pm 3 \pm 1$$

On trouvera 1—1=0.... 1—1=0.... 8—8=0.... 7—7=0. Il faut que l'on ait la somme de deux différences de différences prises l'une en horizontale, l'autre en verticale, égale à 0. On ne peut donc comparer que les différences de différences égales dans chaque groupe, et l'on aurait les 4 diagonales suivantes, qui seraient au nombre de 8, en changeant tous les signes de chacune.

$$7{,}5 - 6{,}5 - 3{,}5 + 2{,}5$$
$$6{,}5 - 5{,}5 - 3{,}5 + 2{,}5$$
$$6{,}5 + 1{,}5 - 4{,}5 - 3{,}5$$
$$5{,}5 + 1{,}5 - 4{,}5 - 2{,}5$$

La première, en changeant les signes, est celle du carré à bandes de la figure.

On va encore donner le carré de 17.

ARTICLE XII.

CARRÉ DE 17.

Ce que l'on va dire sur le carré de 17 servira pour les carrés impairs, comme les carrés de 10 et de 12 guideront pour les carrés pairs.

On suppose que l'on veuille faire une croix, et que les parties du carré de coupures soient des carrés; les bandes des branches de la croix sont au moins au nombre de 5. En effet deux bandes laisseraient 15, qui, étant impair, ne peut se partager en deux; trois bandes laisseraient 14, dont la moitié est 7; et, comme 7 est impair, il ne peut

convenir aux carrés partiels. Les branches ne peuvent donc avoir ni un nombre pair de bandes, puisqu'il resterait un nombre impair pour les carrés partiels ; il ne peut pas davantage rester un nombre divisible par 2 seulement : ainsi les bandes ne peuvent être que 5 ou 9.

Si l'on voulait faire croix à 9 bandes par branche, on pourrait former les 4 carrés de 16 cases aux angles avec les 32 premiers et les 32 derniers nombres, puis prendre les 81 du milieu pour le carré d'intersection, et, avec les 72 différences restantes en plus ou en moins, composer 8 groupes de 9 différences valant 0. Ces différences restantes sont celles des nombres 33 à 104, et par conséquent de 41 à 112, en plus ou en moins. Dans la composition de ces groupes on ne peut comparer 2 différences à 7 : car il faudrait que, sur les 72 différences positives, les 16 plus grandes fussent égales aux 56 plus petites, ou plus grandes qu'elles, ce qui n'est pas, puisque 97+98+... 112 ont pour somme 1672, et 41+42+... 96 aussi pour somme 3836. On ne peut pas davantage comparer 3 différences à 6 autres : car alors les 24 plus grandes devraient au moins être égales aux 48 plus petites, tandis que les premières 89+90.... +112 valent 2412, et les dernières 41+42+.... 88=3096. Il faut donc que la comparaison s'établisse de 4 à 5 différences, et par conséquent que les 32 plus grandes soient au moins égales aux 40 plus petites. La somme des 32 plus grandes 81+82+... 112 valent 3088 ; les 40 plus petites 41+42+.... 80 ont pour somme 2420. La différence 3088—2420=668, dont la moitié est 334 ; on peut faire passer parmi les petites les 11 grandes différences 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 89, 90, 91, 92, dont la somme est

950, et mettre parmi les grandes les 11 petites 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, dont la somme est 616, et l'on obtiendra 950—616=334. On formerait les huit groupes, par exemple, comme suit :

109+110+111+112—89—90—91—92—80
103+108+ 93+ 99—78—79—81—82—83
100+101+ 98+ 59—69—70—72—73—74
96+ 97+ 54+ 56—62—63—65—66—47
105+106+107+ 88—84—85—86—87—64
102+104+ 51+ 60—44—45—75—76—77
57+ 58+ 94+ 95—67—68—71—48—50
52+ 53+ 55+ 61—41—42—43—46—49

On se dispensera de donner cette croix, qu'on peut aisément construire d'après ce qui précède.

Si les branches de la croix ont 5 bandes, les carrés partiels seront ceux de 6. Le premièr a été construit par les simples 1, 2, 3, 4, 5, 6, et les multiples 0, 6, 12, 271, 277, 283; le second par les mêmes simples, et les multiples 18, 24, 30, 253, 259, 265; le troisième par les multiples 36, 42, 48, 235, 241, 247; enfin le 4.e par les multiples 54, 60, 66, 217, 223, 229, avec les mêmes simples. Le carré d'intersection a été fait avec les 25 nombres du milieu; les différences restantes seront celles des nombres 73, 74.... 132 et complémens, ou de 13 à 72; il faut 12 groupes de 5 différences, dont 2 soient égales à 3 : ainsi sur les 60 différences positives, les 24 plus grandes doivent au moins être égales aux 36 petites. Les 24 plus grandes sont 49, 50....72. La somme est (49+72) 12=121·12=1452. Les 36 plus petites, étant 13, 14....48, ont pour somme

(48+13) 18=61·18=1098. La différence 1452—1098 est 354, dont la moitié est 177. Si l'on fait passer les 12 grandes 49, 50.... 60, dont la somme est 654, parmi les petites, et les 12 petites 35, 36.... 43, 31, 47, 48, qui ont pour somme 477, parmi les grandes, il viendra 654—477 =177; on pourra former les groupes comme suit (*figure* 310, *planche* XLIV).

71+72—59—60—24	48+35—49—21—13
69+70—55—58—26	47+43—45—29—16
68+67—56—57—22	42+41—44—25—14
65+66—51—52—28	39+40—34—30—15
63+64—53—54—20	38+31—33—17—19
61+62—50—46—27	36+37—32—23—18

On a déjà dit qu'on pouvait mettre tel ou tel groupe à volonté, pourvu qu'il y en eût 6 en verticale et autant en horizontale. Les nombres qui répondent aux différences peuvent aussi se placer à volonté dans chaque ligne; seulement les groupes complémentaires des 6 groupes horizontaux ou verticaux doivent se trouver en horizontale ou en verticale, de manière à compléter les 12 lignes de chaque nature. Il est nécessaire que les nombres de complément soient pour les groupes horizontaux sur la même verticale, et pour les groupes verticaux sur la même horizontale. On a fait suivre, dans la figure, chaque série de celle des complémens; on a supprimé les différences, et substitué les nombres correspondans; on a omis également les nombres des 4 carrés angulaires, qui sont égaux, et composés de 18 nombres et complémens. Leur réunion est donc encore magique. On pouvait composer les 4 carrés

partiels des angles d'une foule d'autres manières, par exemple : le 1.er carré par les simples 1, 5, 9, 13, 17, 21, et les multiples 0, 24, 48, 220, 244, 268 ; le 2.e par 2, 6, 10, 14, 18, 22, et les multiples 0, 24, 48, 218, 242, 266 ; le 3.e carré par 3, 7, 11, 15, 19, 23, et les multiples 0, 24, 48, 216, 240, 264 ; enfin le 4.e par 4, 8, 12, 16, 20, 24, et les multiples 0, 24, 48, 214, 238, 262.

On obtient (*figure* 311) châssis symétrique, quoique irrégulier. On a le même carré d'intersection, quoique divisé en plusieurs parties, et les mêmes groupes ; mais les carrés de coupures sont au nombre de 16, dont 8 sont formés par les nombres de 1 à 72, et les 8 autres avec leurs complémens. Ces 16 carrés sont arrangés par la méthode expéditive du carré de 4 à deux progressions. Il était nécessaire de changer les carrés de la figure 310 : car les carrés de 6 ne pouvaient pas se partager en 4 carrés dont la somme fût magique, quoique chacun d'eux le fût séparément. Il a donc fallu recourir à l'arrangement de la figure 311. Chaque carré de 3 a été fait par la méthode expéditive. Le carré central de 9 n'est pas magique, sauf les diagonales.

Les deux figures précédentes sont symétriques ; les suivantes ne le sont pas. On a fait (*figure* 312) 9 carrés de 4 toujours avec les 72 premiers et 72 derniers nombres, chaque carré comprenant 8 nombres et ses complémens. Le carré d'intersection a été fait par tableaux, et 139 se trouve entrer dans la 2.e diagonale. Si l'on eût conservé les groupes comme à la figure 310, la 1.re diagonale serait toujours magique, étant composée des diagonales de 3

carrés partiels et de celle d'intersection; quant à la 2.e, ayant déjà les diagonales de 2 carrés partiels, il lui faut encore 9 nombres : elle aurait retenu 185, 106, 101, 170, 202, 89, 79, 210. La somme de ces nombres est 1142, à quoi ajoutant 139, il serait venu 1142+139=1281. Il faut à la diagonale 145·9=1305; la différence est=24. Il faut voir si, en changeant de place quelques groupes, on peut obtenir ces 24 unités qui manquent. Sans toucher aux groupes horizontaux, on peut alterner les groupes 182, 181, 113, 127, 122, et 186, 187, 101, 120, 131 : on aura 113 au lieu de 101. Il ne manque plus que 12 : alternant les groupes 185, 184, 115, 111, 130, et 193, 180, 196, 124, 132, on aura 193 au lieu de 185 : la différence est 8; il ne faut plus que 4, qu'on peut obtenir en alternant 97, 110, 194, 166, 158, et 105, 106, 175, 179, 160 : car il viendra 110 au lieu de 106. Il y a une foule d'autres manières d'obtenir le même résultat : par exemple, en mettant 130 au lieu de 185 dans le même groupe, et 179 au lieu de 106 dans le groupe précédent, on aurait 130+179=309 au lieu de 185+106=291, la diagonale aurait 18 de plus; les complémens auraient suivi le sort des nombres. Il faut encore 6 : il suffit d'alterner les deux groupes 213, 212, 89, 88, 123, et 207, 206, 95, 99, 118 : on aurait 95 au lieu de 89; et, la différence étant 6, la diagonale serait complète. Comme la diagonale n'entre dans les carrés partiels qu'en parcourant leurs diagonales, on a pu agir directement sur les nombres; dans le cas contraire on emploierait les différences.

On voit (*figure* 313) le carré de 17 avec équerre dans

équerre. On a choisi pour le carré de 12 les 72 premiers nombres et leurs complémens, comme dans les précédentes figures. Le carré de 8 a été fait avec les 32 premiers et complémens. Il a été divisé en 4 carrés égaux. Le carré d'intersection de cette équerre intérieure de 8 a été construit avec les derniers de ces 72 nombres et leurs complémens. Il est resté 32 différences, dont on doit faire 8 groupes de 4, en comparant deux à deux les différences. Les 16 plus grandes, de 33 à 48, ont pour somme 97 +98... +112 = 209 · 8 = 1672. Les 16 petites des nombres 49 à 64, valent 81 + 82 +.... 96 = 177 · 8 = 1416. La différence est 1672—1416 = 256. La moitié est 128. Si l'on transporte parmi les grandes les différences 82, 83, 86, 87, 88, 91, 92, 93, dont la somme est 702; et des grandes parmi les petites, les 8 différences 97, 98, 100, 101, 104, 107, 111, 112, dont la somme est 830, on aura 830—702 = 128, et l'on a composé les groupes comme suit :

82+ 83— 81— 84.... 87+ 88— 85— 90.....
86+105— 95— 96.... 91+ 92— 89— 94.....
93+108— 97—104.... 103+110—101—112. ....
102+109—100—111. ... 99+106— 98—107

Ces groupes peuvent, sans s'occuper des grandes ou petites différences, se faire sur le champ comme on le voit ici :

112+109—110—111.... 108+105—106—107....
104+101—102—103. ...—100— 97+ 98+ 99....
96+ 93— 94— 95.... 92+ 89— 90— 91....
— 88— 85+ 86+ 87.... 84+ 81— 82— 83

Ce genre de composition aurait lieu toutes les fois que les différences à comparer sont en nombre positif égal au nombre négatif de ces différences, et pourvu que les différences de chaque groupe soient en nombre divisible par 4.

Revenant à la figure 313, la double équerre formée, le carré de 5, qui est celui d'intersection, est le même que celui de la figure 312; les groupes sont restés aussi les mêmes, mais disposés de manière à rendre la 2.e diagonale régulière : car la 1.re l'est par construction. Or on a déjà dans l'équerre les nombres diagonaux 232, 57, 63, 68, 37, 246, 256, dont la somme est 959. Mais il faut à cette diagonale 145 · 17=2465 : il manque donc 2465 —959=1506. On a pris les groupes tels que les nombres de la diagonale sont 182, 188, 115, 174, 158, 117, 199, 92, 74, 207=1506 : ainsi le carré est formé. Il se compose de 9 carrés, savoir : les 4 carrés de l'équerre intérieure, et celui qui résulte de leur réunion; du carré d'intersection de l'équerre extérieure et du carré d'équerre total, du carré d'intersection, et du carré total.

Cet exemple est très-remarquable, et doit être retenu.

On voit (*figure* 314, *planche* XLV) un châssis irrégulier à traverse, et l'on n'a pas eu besoin de recourir aux différences; les 16 carrés de 3 ont été disposés par la méthode expéditive du carré de 4; le carré d'intersection est celui de la figure 310, et fait avec les 25 nombres du milieu. La 1.re diagonale est toujours régulière, étant composée de celles des 4 carrés de 3 diagonalement placés, et de la diagonale du carré d'intersection. Quant à la seconde, les deux carrés de 3 aux angles ont trois couples par leurs diagonales; il ne faut plus que 11 · 145

=1595 : or on a déjà les trois nombres invariables 147, 145, 143, dont la somme est 435; il faut encore 1160. Les nombres des carrés de 3 qui font partie de la diagonale sont 61, 63, 229, 235, qui valent 588: il manque encore 572; c'est cette dernière somme que doivent fournir les groupes à la diagonale. Ces groupes sont ceux des figures précédentes. Si donc on prend les groupes 83, 84, 195, 191, 172... 185, 184, 115, 111, 130... 82, 81, 198, 199, 165... 192, 188, 100, 116, 129, on aura 191 + 184 + 81 + 116 en diagonale; et comme la somme de ces nombres est 572, la 2.e diagonale sera convenable, et le carré total magique.

Voici une forme très-irrégulière (*figure* 315). Toujours les mêmes carrés partiels de 3; le même carré d'intersection, dont partie est en bordure à droite, et au bas du carré. On peut, si l'on veut, faire quelques changemens de position dans les nombres des carrés partiels. Ici les nombres forcés sont 30, 86, 51, 50, 49, 260, 254; leur somme =730 : il faut 2465 = 145 . 17. Il manque donc 2465 — 730 = 1735, qu'on doit faire avec 10 nombres des groupes, qui sont toujours ceux des précédentes figures. Il est clair que la 1.re diagonale est encore régulière, étant composée des diagonales du carré de 12, et de celui d'intersection. On voit que les nombres 169, 193, 187, 194, 179, 202, 195, 76, 210, 130, ont pour somme 1735. Cette diagonale étant convenable, le carré est magique.

Il y aurait encore une foule de formes à donner au carré de 17, comme à tous les autres. Les transformations sont innombrables; chacun peut les varier à sa fantaisie,

examiner s'il ne se présente aucune impossibilité, et si l'on peut y remédier par un changement de position dans quelque partie composante de ces carrés. Le champ est vaste; mais on croit n'avoir rien laissé à désirer pour être en état de vaincre toutes les difficultés qui pourraient se présenter dans les formes que l'on voudrait donner aux carrés magiques.

On termine ce paragraphe par une autre méthode très-facile pour former les carrés dont la racine se divise par 2 seulement, au moyen des différences.

On forme arbitrairement une diagonale, puis la moitié des horizontales, pour chacune desquelles on prend 2 différences de la diagonale, dont une avec changement de signe. Ces différences étant placées, l'autre moitié des horizontales se compose des complémens placés dans les cases correspondantes : on arrive sur le champ à un carré, et l'on peut se dispenser même de construire le carré des différences, et passer sur le champ au carré des nombres.

CARRÉ DE 6.

Soit formée arbitrairement la diagonale 13,5 + 12,5 + 2,5 — 10,5 — 9,5 — 8,5

Qu'on prenne aussi à volonté pour les 3 horizontales :

13,5—12,5+17,5—16,5+ 4,5— 6,5
2,5+10,5—15,5+14,5—13,5+ 1,5
9,5— 8,5+11,5— 7,5— 5,5+ 0,5

on aura

—12,5	+17,5	—16,5	+ 4,5	— 6,5	+13,5
—15,5	+10,5	+14,5	—13,5	+ 2,5	+ 1,5
+11,5	— 7,5	+ 9,5	— 8,5	— 5,5	+ 0,5
—11,5	+ 7,5	— 9,5	+ 8,5	+ 5,5	— 0,5
+15,5	—10,5	—14,5	+13,5	— 2,5	—11,5
+12,5	—17,5	+16,5	— 4,5	+ 6,5	—13,5

31	1	35	14	25	5
34	8	4	32	16	17
7	26	9	27	24	18
20	11	28	10	13	19
3	29	33	5	21	20
6	36	2	23	22	32

Quand les deux premières horizontales sont formées, on s'assure si la troisième est possible.

Comme on n'a plus en diagonale que —9,5—8,5, cela donne ±1; les différences restantes étant 11,5....7,5.... 5,5....0,5, il faut que les différences de ces différences vaillent ±1. D'abord on ne peut en prendre 3 et soustraire la 4.e : car il viendrait une somme plus grande ou plus petite que 1; mais si l'on fait les différences de différences de manière que les 4 différences entrent dans la somme, on formera

11,5—7,5= 4... 11,5—5,5= 6... 11,5—0,5=11...
7,5—5,5= 2... 7,5—0,5= 7... 5,5—0,5= 5...
11,5+7,5=19... 11,5+5,5=17... 11,5+0,5=12...
7,5+5,5=13... 7,5+0,5= 8... 5,5+0,5= 6

Il n'y a que 11,5—7,5, et 5,5—0,5, ou 11,5—5,5, et 7,5—0,5 : ce qui donne 4—5 ou 6—7; mais ils rentrent l'un dans l'autre : car on a 11,5—7,5—5,5+0,5 pour le premier, et 11,5—5,5—7,5+0,5 pour le second: ainsi la 3.e horizontale est possible. Il est toujours bon de conserver les plus petites différences pour cette 3.e horizontale.

Voyons le carré de 10.

Soit la diagonale, que nous supposerons la 2.e :

43,5 + 42,5 + 41,5 + 20,5 — 28,5 — 26,5 — 25,5 — 24,5 — 23,5 — 19,5

Soient les horizontales

43,5 — 42,5 + 49,5 — 47,5 + 34,5 — 33,5 — 32,5 — 31,5 + 30,5 + 29,5
41,5 — 20,5 — 48,5 — 46,5 + 44,5 — 35,5 + 27,5 + 22,5 + 21,5 — 6,5
28,5 — 26,5 + 45,5 — 40,5 — 39,5 + 38,5 — 37,5 + 36,5 — 18,5 + 13,5
25,5 — 24,5 + 17,5 — 16,5 + 15,5 — 14,5 — 12,5 + 11,5 — 10,5 + 8,5
23,5 — 19,5 — 9,5 — 7,5 + 5,5 + 4,5 + 3,5 + 1,5 + 0,5 — 2,5

I l viendrait

— 42,5 + 49,5 — 47,5 + 34,5 — 33,5 — 32,5 — 31,5 + 30,5 + 29,5 + 43,5
— 48,5 — 20,5 — 46,5 + 44,5 — 35,5 + 27,5 + 22,5 + 21,5 + 41,5 — 6,5
+ 45,5 — 40,5 + 28,5 — 39,5 + 38,5 — 37,5 + 36,5 — 26,5 — 18,5 + 13,5
+ 17,5 — 16,5 + 15,5 + 25,5 — 14,5 — 12,5 — 24,5 + 11,5 — 10,5 + 8,5
— 9,5 — 7,5 + 5,5 + 4,5 + 23,5 — 19,5 + 3,5 + 1,5 + 0,5 — 2,5
+ 9,5 + 7,5 — 5,5 — 4,5 — 23,5 + 19,5 — 3,5 — 1,5 — 0,5 + 2,5
— 17,5 + 16,5 — 15,5 — 25,5 + 14,5 + 12,5 + 24,5 — 11,5 + 10,5 — 8,5
— 45,5 + 40,5 — 28,5 + 39,5 — 38,5 + 37,5 — 36,5 + 26,5 + 18,5 — 13,5
+ 48,5 + 20,5 + 46,5 — 44,5 + 35,5 — 27,5 — 22,5 — 21,5 — 41,5 + 6,5
+ 42,5 — 49,5 + 47,5 — 34,5 + 33,5 + 32,5 + 31,5 — 30,5 — 29,5 — 43,5

93	.	.	.	.	.	.	.	.	7
.	71	.	.	.	.	.	.	9	.
.	.	22	.	.	.	.	77	.	.
.	.	.	25	.	.	75	.	.	.
.	.	.	.	27	70	.	.	.	.
.	.	.	.	74	31	.	.	.	.
.	.	.	76	.	.	26	.	.	.
.	.	79	.	.	.	.	24	.	.
.	30	.	.	.	.	.	.	92	.
8	.	.	.	.	.	.	.	.	94

Il suffit de placer les diagonales : car tous les nombres de chaque horizontale, excepté les diagonaux, se placent à volonté dans cette horizontale, à raison des complémens.

Pour une même diagonale et mêmes horizontales, ce carré donne une multitude de combinaisons : car les huit nombres qui complètent chaque horizontale peuvent se combiner de 1·2·3·4·5·6·7·8=40320 manières ; et, comme chaque horizontale donne le même nombre, on aura pour les 5 horizontales 40320^5, ou 106,562,062,388,507,443,200,000, ou plus qu'un sextillion. Cette forme est à retenir. Mais qu'est ce nombre comparativement au produit des 100 premiers nombres ? que de millions à parier contre un qu'on ne ferait pas de carré, dût-on y passer sa vie, sans une marche facile, et appropriée à tous les cas des racines divisibles par 2 ! Les auteurs sont loin d'avoir calculé cette prodigieuse diversité, et pour un seul cas.

Voyons encore le carré de 14 :

Soit la diagonale 92,5+91,5+90,5+89,5+81,5+77,5 —74,5—73,5—72,5—69,5—68,5—67,5—66,5—30,5

Soient les horizontales comprenant chacune deux différences de la diagonale, dont une avec changement de signe:

92,5—91,5+97,5—96,5+95,5—94,5+93,5—88,5+87,5—86,5+85,5—84,5—80,5+70,5

90,5—89,5+83,5—82,5+79,5—78,5+76,5—75,5+71,5—65,5—64,5—63,5+62,5+55,5

81,5—77,5+61,5—60,5+59,5—58,5+57,5—56,5—54,5—53,5+52,5+51,5—50,5+47,5

74,5—73,5+49,5—48,5+46,5—45,5+44,5—43,5+42,5—41,5+40,5—39,5+31,5—37,5

72,5—69,5+38,5—35,5+34,5—33,5+32,5—29,5—28,5—27,5—26,5+25,5+24,5+22,5

68,5—67,5+23,5—21,5+20,5—19,5+18,5—17,5—16,5—15,5+14,5+13,5+11,5—12,5

66,5—30,5—36,5+10,5+ 9,5— 8,5— 7,5— 6,5+ 5,5+ 4,5+ 0,5— 1,5— 2,5— 3,5

On aura pour la 2.e diagonale, à partir de l'angle supérieur,

+92,5+90,5+81,5—73,5—69,5—67,5—30,5—66,5—68,5—72,5—74,5+77,5+89,5+91,5

La 1.re diagonale est le complément de la 2.e. Les autres nombres dans chaque horizontale se placent arbitrairement. Voici le carré résultant, sans former celui des différences:

190	1	195	3	193	5	187	11	185	13	183	179	28	6
15	188	181	19	177	22	174	27	164	163	162	36	8	43
37	159	176	39	157	41	155	153	152	46	47	17	149	51
49	147	52	24	144	54	142	56	140	58	172	138	67	136
60	134	64	132	26	66	128	127	126	168	125	73	74	76
75	120	78	118	80	30	116	115	166	114	84	85	87	111
135	88	89	107	106	105	32	129	93	94	98	100	101	102
62	109	108	90	91	92	165	68	104	103	99	97	96	95
122	77	119	79	117	167	81	82	31	83	113	112	110	86
137	63	133	65	171	131	69	70	71	29	72	124	123	121
148	50	145	173	53	143	55	141	57	139	25	59	130	61
160	38	21	158	40	156	42	44	45	151	150	180	48	146
182	9	16	178	20	175	23	170	33	34	35	161	189	154
7	196	2	194	4	192	10	186	12	184	14	18	169	191

Rien n'est donc plus facile que cette construction.

On met dans la 1.re diagonale les nombres répondant aux signes changés de la seconde, et pris dans chacune des sept horizontales. Ainsi — 91,5, auquel répond 190, est à l'angle supérieur de la 1.re diagonale; et 6, répondant à 92,5, à l'angle supérieur de la seconde; 188, répondant à — 89,5, sera à la 1.re diagonale et à la 2.e horizontale; et 8, répondant à 90,5, à la même horizontale et à la 2.e diagonale. Il en est de même pour 176, 24, 26, 30 et 32, répondant à — 77,5 + 74,5 + 72,5 + 68,5 + 66,5 pour la 1.re diagonale aux 3.e, 4.e, 5.e, 6.e, 7.e horizontales, et 17, 172, 168, 166 et 129, répondant à + 81,5 — 73,5 — 69,5 — 67,5 — 30,5 dans les mêmes horizontales et en 2.e diagonale. Ces nombres placés, les douze autres de chaque horizontale se mettent arbitrairement dans leur ligne; chaque différence négative s'ajoute à 98,5, ce qui se réduit à diminuer une unité de la différence négative, et ajouter 100 au reste. Ainsi — 91,5 ajouté à 98,5 = 91 + 99 = 90

+ 100 : d'où l'on voit que l'on obtient immédiatement les nombres répondant aux différences négatives, et plus facilement même que ceux qui répondent aux différences positives. Pour ces derniers nombres, on ne fait pas attention à la demi-unité, et il suffit de soustraire l'entier de 98 : ainsi, par exemple, le nombre répondant à 70,5 = 98,5 — 70,5 = 98 — 70 = 100 — 72 : d'où l'on conclut qu'on peut encore ajouter deux unités au nombre à soustraire, et prendre le complément à 100 de ce nombre augmenté. Cette méthode est facile.

Les 12 nombres donneraient $(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12)^7$, nombre prodigieux.

Il n'en est pas des carrés impairs comme des pairs : on ne peut dans les premiers opérer comme pour les derniers. Le moyen occupe toujours le centre ; les complémens sont aux cases symétriques. On ne pourrait les mettre aux cases correspondantes, puisque la ligne du milieu n'aurait point de ligne correspondante ; on agira comme suit :

On forme un nombre d'horizontales égal à la plus petite moitié de la racine ; puis on fait même quantité de verticales, dont chacune aura deux différences de chaque horizontale, l'une de ces différences changeant son signe. Cela détermine les lignes correspondantes ; quant à celle du milieu, elle comprend les nombres non employés en horizontales.

Pour 7, soient les trois horizontales :

$$21+17+12-23-18-13+4$$
$$20+24-22-19-8+7-2$$
$$16+15-14-11-10+9-5$$

Et les trois verticales :

21—17+20—24+16—15—1
12+23—19— 7—14+11—6
18—13+ 8— 2— 9— 5+3

Il reste 1, 3, 6. On voit qu'il faut que l'une des trois différences 1, 3, 6 entre dans chaque verticale.

Il vient le carré de différences :

+21+12—13+ 4—18—23+17
+20—19— 2—22— 8+ 7+24
+16—14— 5—10+ 9—11+15
— 1— 6+ 3+ 0— 3+ 6+ 1
—15+11— 9+10+ 5+14—16
—24— 7+ 8+22+ 2+19—20
—17+23+18— 4+13—12—21

Et celui des nombres :

4	13	38	21	43	48	8
5	44	27	47	33	18	1
9	39	30	35	16	36	10
26	31	22	25	28	19	24
40	14	34	15	20	11	41
49	32	17	3	23	6	45
42	2	7	29	12	37	46

Pour 9 soient les horizontales :

36+35+30+ 4—23—24—25—26— 7
34+33+29+10—28—27—38—32+19
31+40+39+ 8—37—22—21—20—18
16+17+12+ 9—15—14—13—11— 1

Les verticales :

36—35+34—33—40+31+17—16+6
30— 4+29—10— 8—37+12— 9—3
26—25+28—27—22+21+15—11—5
24—23+38—19—39—18+14—13—2

Après avoir formé les quatre horizontales, il reste les différences 2, 3, 5, 6; on forme d'abord les trois premières verticales de manière que chacune contienne deux différences de chaque horizontale, dont une change son signe, et une des quatre différences restantes, comme on le voit ici; on n'a plus que 2 non employé. Pour savoir si l'on peut faire la 4.e verticale, il n'y a qu'à former les différences de différences des trois différences non employées de chaque horizontale.

1.re horizontale —24—23—7 donne :

$$24 - 23 = 1$$
$$24 - 7 = 17$$
$$23 - 7 = 16$$

La 2.e —38—32+19 :

$$38 - 32 = 8$$
$$38 + 19 = 57$$
$$32 + 19 = 51$$

La 3.e +39—20—18 :

$$39 + 20 = 59$$
$$39 + 18 = 57$$
$$20 - 18 = 2$$

La 4.e —14—13—1 :

$$14 - 13 = 1$$
$$14 - 1 = 13$$
$$13 - 1 = 12$$

Prenant de nouveau les différences de ces dernières différences 2 à 2, on aura :

Pour celles provenant des 1.re et 2.e horizontales.						
9	7...	58	56...	52	50	
25	9...	74	40...	68	34	
24	8...	73	41...	67	35	

Pour celles provenant des 3.e et 4.e horizontales.					
60	58...	72	46...	71	47
58	56...	70	44...	69	45
3	1...	15	11...	14	10

Ajoutant ± 2, il vient :

11	7...	9	5...	60	56...	58	54...	54	50...	52	48
27	23...	11	7...	76	72...	42	38...	70	66...	36	32
26	22...	10	6...	75	71...	43	39...	69	65...	37	33

Il faut que l'une de ces dernières différences soit égale à quelqu'une de celles des 3.e et 4.e horizontales ; celles-ci sont, par ordre :

1 3 10 11 14 15 44 45 46 47 56 58 58 60 69 70 71 72

et l'on aura $9+2=11=13-2=11$, et ainsi des suivantes :

$$58 + 2 = 60 \ldots\ldots 58 - 2 = 56$$
$$56 + 2 = 58 \ldots\ldots 56 + 2 = 58$$
$$9 + 2 = 11 \ldots\ldots 74 - 2 = 72$$
$$68 + 2 = 70 \ldots\ldots 8 + 2 = 10$$
$$73 - 2 = 71 \ldots\ldots 67 + 2 = 69$$

En tout onze manières de faire la 4.e verticale.

Soit pris $58=57+1$ parmi les différences des 3.e et 4.e horizontales, et $58=56+2=57-1+2$ composé du 2 restant et de différences des 1.re et 2.e horizontales : on aurait $57+1-57+1-2$, ce qui revient à $39+18+14-13-38-19+24-23-2$, ou bien $24-23+38+19$

—39—18+14—13—2, ou encore 23—24+38+19—39 —18+13—14+2.

Voici les carrés pour les quatre horizontales et les quatre verticales choisies :

+36+30—25—23— 7—24—26+ 4+35
+34+29—27+19—32—38—28+10+33
+31—37—22—18—20+39—21+ 8+40
+17+12—11—13— 1—14—15+ 9+16
+ 6— 3— 5— 2+ 0+ 2+ 5+ 3— 6
—16— 9+15+14+ 1+13+11—12—17
—40— 8+21—39+20+18+22+37—31
—33—10+28+38+32—19+27—29—34
—35— 4+26+24+ 7+23+25—30—36

5	11	66	64	48	65	67	37	6
7	12	68	22	73	79	69	31	8
10	78	63	59	61	2	62	33	1
24	29	52	54	42	55	56	32	25
35	44	46	43	41	39	36	38	47
57	50	26	27	40	28	30	53	58
81	49	20	80	21	23	19	41	72
74	51	13	3	9	60	14	70	75
76	45	15	17	34	18	16	71	77

La 1.re ligne du tableau tiré du carré ci-dessus, 5, 2, 3, 1, 3, 2, 4, 1, 6, montre combien est peu féconde la méthode de Lahire : car on ne peut deviner ces tableaux. Les différences sont toujours le moyen le plus convenable; on doit y joindre cependant la méthode ordinaire des tableaux, afin de déplacer le moyen.

Voyons encore le carré de 11.

Soient les cinq horizontales

56+55+54+53+52—51—50—49—48—47—25
46+45+44+43+42—41—40—39—38—36—26
37+60+59+58—57—35—34—33—32—31+ 8
30+29+28+27—24—23—22—21—20—19+15
18+17+16—14—13—12—11— 7— 6+ 9+ 3

Reste 1, 2, 4, 5, 10 non employés dans les horizontales : une de ces différences doit se trouver à chaque verticale; elles pourront être :

56—55+46—45+37—60+30—28+18— 3+ 4
54—53+44—43+59—58+29—27—16+ 9+ 2
52+51—42—41—57+35+23—24—14+12+ 5
50—49+40—39+34—33+22—21—11+ 6+ 1
25—48+26—36+31+ 8+19+15—17—13—10

Qu'on forme seulement les quatre premières, il reste 10; et les différences en horizontales :

1.re horizontale,	—48—47—25	48—47= 1 48—25=23 47—25=22
2.e horizontale,	—38—36—26	38—36= 2 38—26=12 36—26=10
3.e horizontale,	—32—31+ 8	32—31= 1 32+ 8=40 31+ 8=39
4.e horizontale,	—20—19+15	20—19= 1 20+15=35 19+15=34
5.e horizontale,	+17—13— 7	17+13=30 17+ 7=24 13— 7= 6

Formant les différences de différences des deux premières horizontales :

3	1....	13	11....	11	9
25	21....	35	11....	33	13
24	20....	34	11....	32	12

Puis des 3.e et 4.e

2	0....	36	34....	35	33
41	39....	75	5....	74	6
40	38....	74	4....	73	5

Enfin de la 5.e et du nombre 10 on aura:

40	20
34	14
16	4

Par ordre : 4 14 16 20 34 40.

Que l'on compare chaque différence de différences des 2 premières horizontales avec toutes celles des 3.e et 4.e successivement : si leur somme ou leur différence, toujours prise positivement, est égale à l'une des 6 différences provenant des trois de la 5.e horizontale avec le nombre 10 restant, ce sera une 5.e verticale. Que l'on choisise, par exemple, 33—73=—40. .... 33=23+10=48—25+36—26.... 73=39+34=31+8+19+15.... 40=17+13+10.

Donc 73—33—40=—33+73—40=25—48+26—36+31+8+19+15—17—13—10. C'est la verticale adoptée.

On abrége beaucoup la comparaison dont il est question en observant que tous les nombres 4, 14, 16, 20, 34, 40 sont pairs, et que par conséquent on ne doit comparer que pair avec pair, ou impair avec impair, pour obtenir

résultat pair, soit par addition, soit par soustraction. Ainsi, par exemple, les deux premières lignes de différences de différences des 1.re et 2.e horizontales sont à omettre, comparées avec des pairs des 3.e et 4.e horizontales; de même la 3.e ligne est à écarter, comparée avec des impairs. On voit aussi que les 6 différences 4, 14, 16, 20, 34, 40, n'ont que 3 terminaisons, 0, 4, 6 : par conséquent 2 et 8 n'en font pas partie, et toute comparaison qui aurait ces terminaisons serait à omettre.

Voici les combinaisons par ordre. Le 1.er nombre est toujours la différence des 1.re et 2.e horizontales; le 2.e, la différence des 3.e et 4.e. On remarquera encore qu'il est inutile de faire des comparaisons qui donneraient un résultat plus grand que 40.

32+ 2= 34 12+ 2= 14	combinaisons avec 2.
20+ 0= 20 34+ 0= 34	combinaisons avec 0.
20—36=—16 32—36=— 4	combinaisons avec 36.
20—34=—14	combinaison avec 34.
1—35=—34 21—35=—14	combinaisons avec 35.
1+33= 34 13—33=—20 13—33=—20	combinaisons avec 33.
1—41=—40 25—41=—16 21—41=—20	combinaisons avec 41.

$1+39=40$	
$25-39=-14$	combinaisons avec 39.
$35-39=-4$	
$35-75=-40$	combinaison avec 75.
$1-5=-4$	
$11+5=16$	
$11+5=16$	
$9+5=14$	
$9-5=4$	combinaisons avec 5.
$25-5=20$	
$21-5=16$	
$35+5=40$	
$11+5=16$	
$34-74=-40$	combinaison avec 74.
$20-6=14$	
$34+6=40$	combinaisons avec 6.
$10+6=16$	
$10-6=4$	
$24-40=-16$	combinaisons avec 40.
$20-40=-20$	
$24-38=-14$	combinaisons avec 38.
$34-38=-4$	
$34-74=-40$	combinaison avec 74.
$24-4=20$	
$20-4=16$	combinaisons avec 4.
$10+4=14$	
$12+4=16$	
$33-73=-40$	combinaison avec 73.

1 − 5 = − 4 11 + 5 = 16 11 + 5 = 16 9 + 5 = 14 9 − 5 = 4 25 − 5 = 20 21 − 5 = 16 35 + 5 = 40 11 + 5 = 16	combinaisons avec 5.

Quoiqu'il y ait plusieurs résultats exprimés de même, il n'y a pas double emploi: cela résulte de ce qu'il y a des différences égales; mais elles proviennent de combinaisons différentes. Ainsi il y a trois différences = 11 d'une part, et deux différences = 5, ce qui donne 6 combinaisons différentes, et toujours par 11+5=16; en tout, 52 manières d'obtenir la 5.e verticale, ayant les quatre autres et les cinq horizontales à volonté.

Voici les carrés résultans soit par différences, soit par les nombres correspondans :

+56	+54	+52	−49	−48	−47	−25	−50	−51	+53	+55
+46	+44	−41	−39	−36	−38	−26	−40	+42	+43	+45
+37	+59	−57	−33	+ 8	−32	−31	−34	−35	+58	+60
+30	+29	−24	−21	+15	−20	−19	−22	−23	+27	+28
+18	+ 9	−14	−11	−13	− 7	+17	− 6	−12	+16	+ 3
+ 4	+ 2	+ 5	+ 1	−10	+ 0	+10	− 1	− 5	− 2	− 4
− 3	−16	+12	+ 6	−17	+ 7	+13	+11	+14	− 9	−18
−28	−27	+23	+22	+19	+20	−15	+21	+24	−29	−30
−60	−58	+35	+34	+31	+32	− 8	+33	+57	−59	−37
−45	−43	−42	+40	+26	+38	+36	+39	+41	−44	−46
−55	−53	+51	+50	+25	+47	+48	+49	−52	−54	−56

5	7	9	110	109	108	86	111	112	8	6
15	17	102	100	97	99	87	101	10	18	16
24	2	118	94	53	93	92	95	96	3	1
31	32	85	82	46	81	80	83	84	34	33
43	52	75	72	74	68	44	67	73	45	58
57	59	56	60	71	61	51	62	66	63	65
64	77	49	55	78	54	48	50	47	70	79
89	88	38	39	42	41	76	40	37	90	91
121	119	26	27	30	29	69	28	4	120	98
106	104	103	21	35	23	25	22	20	105	107
116	114	10	11	36	14	13	12	113	115	117

Il est plus difficile de faire un carré d'un petit que d'un grand nombre de cases : ainsi, pour le carré de 5, la 2.e verticale peut fort bien ne pouvoir se faire avec des différences prises à volonté pour les deux horizontales et une verticale.

Soient les horizontales $12-11+10-9-2$
$8-7+6-4-3$

1.re verticale $12-10+7-4-5$.... Il reste 1.

1.re horizont. $-11-9-2$ $\begin{cases} 11-9=2 \\ 11-2=9 \\ 9-2=7 \end{cases}$

2.e horizontale. $8+6-3$ $\begin{cases} 8-6=2 \\ 8+3=11 \\ 6+3=9 \end{cases}$

Ajoutant ± 1, on aurait.... 3 1..... 10 8.... 8 6. Or on ne peut faire la 2.e verticale.

Mais si l'on fait la 1.re verticale $12+2-6-3-5$, il reste toujours 1.

Les 3 différences de la 1.re horizontale non employées sont. . . . . + 10 — 11 — 9, et l'on a

$$10 + 11 = 21$$
$$10 + 9 = 19$$
$$11 - 9 = 2$$

Les 3 différences de la 2.e horizontale non employées sont. . . . . + 8 — 7 — 4, et il vient

$$8 + 7 = 15$$
$$8 + 4 = 12$$
$$7 - 4 = 3$$

Ajoutant 1, on obtient. . . . 22 20. . . . 20 18. . . . 3 1. Il n'y a que 3 qui convienne, et l'on aurait 11—9+1 +4—7, d'où l'on tire le carré

+12	— 9	+10	—11	— 2	1	22	3	24	15
— 3	— 7	+ 8	— 4	+ 6	16	20	5	17	7
— 5	+ 1	0	— 1	+ 5	18	12	13	14	8
— 6	+ 4	— 8	+ 7	+ 3	19	9	21	6	10
+ 2	+11	—10	+ 9	—12	11	2	23	4	25

Il faudra donc toujours chercher, dans le cas du carré de 5, la 2.e verticale, ce qui est facile et expéditif.

Soit encore à construire le carré de 21 : le moyen est 221, la plus grande différence est 220.

Soient les 10 horizontales :

200+199+198+197+196+195+194+193+192+191—190—189—188—187—186—185—184—183—182—181—100

180+179+178+177+176+175+174+173+172+171—170—169—168—167—166—165—164—163—162—160—101

161+159+158+157+156+155+154+153+152+151—150—149—148—147—146—145—144—143—142—140—102

141+139+138+137+136+135+134+133+132+131—130—129—128—127—126—125—124—123—122—119—103

121+120+118+117+116+115+114+113+110+104—112—109—108—107—106—105—111— 99— 98— 97— 96

95+ 94+ 93+ 92+ 91+ 90+ 89+ 88+ 87+ 86+ 85+ 84+ 83+ 82—220—219—218—217—216—215+ 66

214+213+212+211+210+ 81—209— 80— 79— 78— 77— 76— 75— 74— 73— 72— 71— 70— 69— 68+ 30

208+207+206+205+204—203—202—201— 67— 65— 64— 63— 62— 17— 16— 15— 14— 13— 12— 11— 5

61+ 60+ 59+ 58+ 57+ 56+ 55+ 54— 53— 52— 51— 50— 49— 48— 47— 46— 45— 44+ 18+ 4+ 3

43+ 42+ 41+ 40+ 39+ 38+ 37+ 36— 35— 34— 33— 32— 31— 29— 28— 27— 26— 25— 19+ 1+ 2

Restent non placés : 6, 7, 8, 9, 10, 20, 21, 22, 23, 24.

Soient les 9 verticales à volonté (on fera bien de marquer les différences des horizontales à mesure qu'on les emploiera en verticales) :

200—199+180—179+161—159+141—139+121—120+ 95— 94+214—213+208—207+ 61— 60+ 42— 43— 10
198—197+178—177+158—157+138—137+118—117+ 93— 92+212—211+206—205+ 59— 58+ 40— 41— 8
196—195+176—175+156—155+136—135+116—115+ 91— 90+210+209—204—203+ 57— 56+ 39— 38— 20
194—193+174—173+154—153+134—133+114—113+ 88— 89+ 79— 80+201—202+ 55+ 3+ 1— 37— 24
192—191+172—171+152—151+132—131+110—104+ 87— 86+ 78— 77+ 64— 65+ 51— 52+ 34— 35— 9
188—187+168—167+148—147+128—127+108—107+ 83— 82+ 76— 75+ 62— 17— 54+ 18+ 31— 25— 22
190—189+170—169+150—149+130—129+112—109+ 85— 84+ 81— 30+ 67— 63— 53— 4+ 33— 32— 7
186—185+166—165+146—145+126—125+106—105+220—219+ 74— 73+ 16— 15+ 50— 47+ 29— 19— 21
184—183+164—163+144—143+124—123+111— 99+218—217+ 72— 71+ 14— 13+ 49— 46+ 28— 27— 23

Reste 6.

1.re HORIZONTALE.

—182—181—100

182—181= 1
182—100= 82
181—100= 81

2.e HORIZONTALE.

—162—160—101

162—160= 2
162—101= 61
160—101= 59

3.e HORIZONTALE.

—142—140—102

142—140= 2
142—102— 40
140—102= 38

4.e HORIZONTALE.

—122—119—103

122—119= 3
122—103= 19
119—103= 16

5.e HORIZONTALE.

— 98— 97— 96

98— 97= 1
98— 96= 2
97— 96= 1

6.e HORIZONTALE.

—216—215+ 66

216—215= 1
216+ 66=282
215+ 66=281

7.e HORIZONTALE.

— 70— 69— 68

70— 69= 1
70— 68= 2
69— 68= 1

8.e HORIZONTALE.

— 12— 11— 5

12— 11= 1
12— 5= 7
11— 5= 6

9.e HORIZONTALE.

—48— 45— 44

48— 45= 3
48— 44= 4
45— 44= 1

10.e HORIZONTALE.

+ 36— 26+ 2

36+ 26= 62
36— 2= 34
26+ 2= 28

Prenant les différences de différences, on aura :

POUR LA 1.re ET LA 2.e HORIZONTALES,

3 1..... 63 60..... 60 58
84 80.....143 21.....141 23
83 79.....142 20.....140 22

POUR LA 3.e ET LA 4.e HORIZONTALES,

5 1.....21 17.....18 14
43 37.....59 21.....56 24
41 35.....57 19.....54 22

POUR LA 5.e ET LA 6.e HORIZONTALES,

2 0.....283 281.....282 280
3 1.....284 280.....283 279
2 0.....283 281.....282 280

POUR LA 7.e ET LA 10.e HORIZONTALES,

63 61.....64 60.....63 61
35 33.....36 32.....35 33
29 27.....30 26.....29 27

POUR LES 8.e ET 9.e HORIZONTALES,

4 2..... 5 3.....2 0
10 4.....11 3.....8 6
9 3.....10 2.....7 5

POUR LES 8.e ET 9.e HORIZONTALES, AJOUTÉES A ± 6.

10 2... 8 4......11 1...9 3...... 8 4... 6 6
16 4...10 2......17 5...9 3......14 2...12 0
15 3... 9 3......16 4...8 4......13 1...11 1

Mettant par ordre ces séries,

$0\ \dddot{1}\ \dddot{2}\ \ddddot{3}\ \ddddot{4}\ 5\ \ddot{6}\ \dddot{8}\ \dddot{9}\ \ddot{10}\ \ddot{11}\ 12\ 13\ 16\ 15\ \ddot{16}\ 17$.... pour les 8.e et 9.e $\pm$ 6. 1.re série.

1 3 20 21 22 23 58 60 60 63 79 80 83 84 140 141 142 143 pour les 1.re et 2.e 2.e

1 5 14 17 18 19 21 21 22 24 35 37 41 43 54 56 57 59 pour les 3.e et 4.e 3.e

0 0 1 2 2 3 279 280 280 280 281 281 282 282 283 283 283 284 pour les 5.e et 6.e 4.e

26 27 27 29 29 30 32 33 33 35 35 36 60 61 61 63 63 64 pour les 7.e et 10.e 5.e

Autant il y a de points au dessus des chiffres de la 1.re série, autant de fois le chiffre pointé se trouve dans cette série. On pourrait encore ajouter la 2.e et la 3.e série par différences, ainsi que la 4.e et la 5.e, et il faudrait que chaque nombre de la 1.re des deux séries résultantes, comparé à tous ceux de la seconde, donnât un des termes de la 1.re. Mais ce calcul serait long; on peut y arriver plus promptement. Qu'on cherche, par exemple, le 1.er nombre de la série dont 6, nombre restant, fait partie. Il est clair que les différences 279, 280, 281, 282, 283 et 284 de la 4.e série ne peuvent être d'aucune utilité ici : car on ne peut, avec ces différences combinées avec celles de la 5.e série, obtenir un résultat égal à celui de la comparaison des nombres des 2.e et 3.e séries, puisque $279-64=215$ sera plus grand que $143+59=202$. On supprimera ensuite 140, 141, 142, 143 de la 2.e série : car $140-59=81$ est plus grand que $64+3=67$. Il restera donc :

2.e série. $\left\{\begin{matrix} 1\ 3\ 20\ 21\ 22\ 23\ 58\ \ddot{60} \\ 63\ 79\ 80\ 83\ 84 \end{matrix}\right\}$ 1.re et 2.e horiz.

3.e série. $\left\{\begin{matrix} 1\ 5\ 14\ 17\ 18\ 19\ \ddot{21}\ 22 \\ 24\ 35\ 37\ 41\ 43\ 54\ 56 \\ 57\ 59 \end{matrix}\right\}$ 3.e et 4.e horiz.

4.e série. $\ddot{0}$ 1 $\ddot{2}$ 3. . . . . 5.e et 6.e horiz.

5.e série. 26 $\ddot{27}$ $\ddot{29}$ 30 32 $\ddot{33}$ $\ddot{35}$ 36 60 $\ddot{61}$ $\ddot{63}$ 64

Si donc on compare 0 1 2 3 à tous les nombres de la 5.e série, il vient pour $\ddot{0}$

$\ddot{26}+0$. . . . $\ddot{26}-0$. . . . $\ddddot{27}+0$. . . . $\ddddot{27}-0$. . . . $\ddddot{29}+0$. . . .

$\ddddot{29}-0$. . . . $\ddot{30}+0$. . . . $\ddot{30}-0$. . . . $\ddot{32}+0$. . . . $\ddot{32}-0$. . . .

$\ddddot{33}+0$. . . . $\ddddot{33}-0$. . . . $\ddddot{35}+0$. . . . $\ddddot{35}-0$. . . . $\ddot{36}+0$. . . . .

$\ddot{36}-0$. . . . $\ddot{60}+0$. . . . $\ddot{60}-0$. . . . $\ddot{61}+0$. . . . $\ddot{61}-0$. . . .

$\ddddot{63}+0$. . . . $\ddddot{63}-0$. . . . $\ddot{64}+0$. . . . $\ddot{64}-0$

ce qui se réduit aux nombres de la 5.e série plusieurs fois répétés.

On aura pour les comparaisons de 1, 2, 3, savoir :

$\left.\begin{matrix} 26\ 25\ldots\ddot{28}\ \ddot{26}\ldots\ddot{30}\ \ddot{28}\ldots 31\ 29\ldots 33\ 31\ldots \\ \ddot{34}\ \ddot{32}\ldots\ \ddot{36}\ \ddot{34}\ldots\ 37\ 35\ldots\ 61\ 59\ldots \\ \ddot{62}\ \ddot{60}\ldots\ddot{64}\ \ddot{62}\ldots 65\ 63 \end{matrix}\right\}$ pour 1.

$\ddot{28}$ $\ddot{24}$...$\ddddot{29}$ $\ddddot{25}$...$\ddddot{31}$ $\ddddot{27}$...$\ddot{32}$ $\ddot{28}$...$\ddot{34}$ $\ddot{30}$...
$\ddddot{35}$ $\ddddot{31}$....$\ddddot{37}$ $\ddddot{33}$....$\ddot{38}$ $\ddot{34}$....$\ddot{62}$ $\ddot{58}$.... } pour 2.
$\ddddot{63}$ $\ddddot{53}$....$\ddddot{65}$ $\ddddot{61}$....$\ddot{66}$ $\ddot{62}$

29 23...$\ddot{30}$ $\ddot{24}$...$\ddot{32}$ $\ddot{26}$...33 27...35 29...
$\ddot{36}$ $\ddot{30}$....$\ddot{38}$ $\ddot{32}$.... 39 33.... 63 57... } pour 3.
$\ddot{64}$ $\ddot{58}$....$\ddot{66}$ $\ddot{60}$....67 61

Donc, mettant par ordre tous ces nombres, on aura depuis 23 jusqu'à 39 inclus, et de 57 à 67 aussi inclus. Il suffit donc de chercher dans la comparaison des différences des 2.e et 3.e séries des nombres égaux à 23 jusqu'à 39, ou de 57 à 67, et l'on aura tous les genres de solutions possibles, en faisant attention aux points : car ils augmentent ce nombre.

Ainsi l'on aura :

Pour 1 : 1+22... 1—24... 1+35... 1—35... 1+37...
1—37...1+56...1+57...1—57...1+59...
1—59

Pour 3 : 21+3... 22+3... 24+3... 35+3... 35—3...
37—3..41—3...54+3...56+3...57+3...
59+3

Pour 20 : 20+5.... 20+14.... 20+17.... 20+18...
20+19....20+37....20+41....20+43...
. 20—43....20—54....20—56....20—59

Pour 21 : 21+5. . . . 21+14. . . . 21+17. . . . 21+18. . . .
21—54. . . .21—56. . . .21—57. . . .21—59. . . .
21+37. . . . 21+41. . . . 21+43

Pour 22 : 22+1. . . . 22+5. . . . 22+14. . . . 22+17. . . .
22+35. . . .22+37. . . .22+41. . . .22+43. . . .
22—54. . . 22—56. . . 22—57. . . . 22—59

Pour 23 : 23+1. . . . 23+5. . . . 23+14. . . . 23+35. . . .
23+37. . . 23+41. . . 23+43. . . 23—54. . . .
23—56. . . 23—57. . . 23—59

Pour 58 : 58+1. . . . 58+5. . . . 58—19. . . . 58—21. . . .
58—22. . . 58—24. . . 58—35. . . 58—1

Pour 60 : 60+1. . . . 60+5. . . . 60—1. . . . 60—21. . . .
60—22. . . . 60—24. . . . 60—35. . . . 60—37

Pour 63 : 63+1. . . . 63—1. . . . 63—5. . . . 63—24. . . . .
63—35. . . . 63—37

Pour 79 : 79—14. . . . 79—17. . . . 79—18. . . . 79—19. . . .
79—21. . . . 79—22

Pour 80 : 80—14. . . . 80—17. . . . 80—18. . . . 80—19. . . .
80—21. . . . 80—22

Pour 83 : 83—17. . . . 83—18. . . . 83—19. . . . 83—21. . . .
83—22. . . . 83—24

Pour 84 : 84—17. . . . 84—18. . . . 84—19. . . . 84—21. . . .
84—22. . . . 84—24

On peut choisir parmi ces combinaisons, pour le seul cas de 0, somme des différences des 8.e et 9.e horizontales, défalcation faite du nombre restant 6.

Soit choisie ci-dessus la combinaison 60—21=39, qui répond à 36+3.

On a d'abord 0=6—6=7—1—6=12—5+44—45—6, en cherchant 0 dans la 1.re série, aux différences.

Maintenant, 60—21 peut être, d'après les 2.e et 3.e séries, 1+59—2—19=182—181+160—101+140—142—122 +103.

3+36, d'après les 4.e et 5.e séries, seront 98—96+216 —215+70—68+36—2 : donc il viendrait 182—181 +160—101+140—142+103—122+96—98+215—216 +68—70+12—5+44—45+2—36—6.

Comme 60 et 21 sont ponctués double l'un et l'autre, on aurait quatre manières d'avoir 60—21; 3 et 36 ne sont ponctués ni l'un ni l'autre : ainsi une seule manière d'obtenir 3+36; et, comme 6, provenant de 7—1, n'a qu'une combinaison, on aura pour 60—21, 3+36, 6—6, 4 verticales différentes; il en serait de même des autres.

On termine ici ce que l'on avait à dire sur la formation des carrés par les différences et différences de différences. Il ne peut plus exister de difficultés : les nombreux exemples ci-dessus les ont fait disparaître, et ont fait découvrir de nouvelles formes de composition dont les auteurs ne se sont pas occupés, et que l'on ne pouvait passer sous silence.

§ 8.

CASES DÉTERMINÉES.

Il n'est pas facile de connaître dans quelle proportion l'on peut disposer des cases pour y placer des nombres donnés de progressions choisies. Moins la racine d'un carré est grande, moins grand est le nombre de cases dont on aurait la disposition. Par exemple, la plus petite racine est 3 : et l'on sait que dans le carré de 3, soit qu'il y ait une seule progression, soit qu'il y en ait 3, on ne peut mettre à la case du milieu que le moyen, qui est le cinquième terme s'il n'y a qu'une progression, et le terme du milieu de la seconde s'il y en a trois. On sait aussi que les angles doivent être remplis par les nombres de rang pair, tandis que le milieu des lignes aura les nombres de rang impair. Ainsi l'on ne pourrait disposer de cases qui ne satisferaient pas à cette condition. Il y a plus : si l'on détermine une case qui puisse recevoir un nombre, on ne peut réserver la case opposée, ou diagonalement placée, si ce n'est pour le complément du premier nombre. Enfin, après avoir placé un nombre à une case déterminée du milieu d'une ligne, on ne peut placer un nombre à un angle, à moins qu'il n'y ait pas de contradiction dans cette disposition. Par exemple, soit 7 au milieu d'un côté : on ne pourrait mettre 4 ou 8 à l'un des angles contigus à ce côté : car $7+4=11$ exigerait 4 à l'autre angle contigu, pour avoir 15, et 4 est déjà placé. $7+8=15$ ne pourrait avoir aucun nombre à cet angle, puisqu'on a déjà 15. Il résulte de cette discussion que c'est à peine si l'on peut disposer

d'une case pour le carré de 3 ; et lorsque la chose est possible, on ne peut en déterminer une seconde que d'après des considérations qui tiennent à la formation totale du carré.

Pour tout carré impair plus grand que celui de 3, on peut toujours disposer d'une case, attendu que les tableaux se prêtent à cet arrangement. Si l'on voulait réserver deux cases, il pourrait se présenter une contradiction dans cette fixation. Que l'on ait, par exemple, 1 à l'un des angles du carré de 5, point de difficulté; que l'on veuille de plus 7 à une autre case, celle du centre, on le suppose, les tableaux pourraient être :

3	2	4	5	1	20	10	15	5	0	23	12	19	10	(1)
4	5	1	3	2	5	0	20	10	15	9	5	21	13	17
1	3	2	4	5	10	15	5	0	20	11	18	(7)	4	25
2	4	5	1	3	0	20	10	15	5	2	24	15	16	8
5	1	3	2	4	15	5	0	20	10	20	6	3	22	13

On remarque que 7 est > 5 : d'où il suit que, le multiple pour obtenir 7 n'étant pas le même que pour avoir 1, il n'y a pas d'impossibilité; mais si le nombre était 2, 3, 4, 5, on aurait encore 0 en diagonale dans le tableau des multiples, ce qui ne peut être. Si au contraire le nombre était 6, on aurait encore 1 dans la diagonale du 1.er tableau.

Si, ayant 1 et 7 comme est dit, on voulait encore 12 à la dernière case de la 3.e horizontale, il faudrait 2 au 1.er tableau; et, comme 2 y est déjà, à l'horizontale en question, on ne pourrait avoir 12. On ne peut donc demander 3, 4, 5 à la dernière case de la 3.e horizontale, puisque le 2.e tableau aurait deux fois 0 en verticale; ni 6, 8, 9, 10, puis-

qu'on aurait deux fois 5 à la 3.e horizontale de ce tableau; ni 11, ni 12, par des raisons analogues; mais bien 13, 14 et 15. Il y aurait à exclure 16, 17, mais à admettre 18, 19, 20, rejeter 21, 22, enfin adopter 23, 24, 25. On ne pourrait donc admettre à la dernière case de la 3.e horizontale que les nombres 13, 14, 15, 18, 19, 20, 23, 24, 25, lorsqu'on a déjà 1 à la 1.re case de la dernière verticale, et 7 au centre du carré. Voici les tableaux pour 19 à la dernière case de la 3.e horizontale; ces 19 se forment par 15 et 4.

5	2	3	4	1	15	10	20	5	0	20	12	23	9	(1)
3	4	1	5	2	5	0	15	10	20	8	4	16	15	22
1	5	2	3	4	10	20	5	0	15	11	25	(7)	3	(19)
2	3	4	1	5	0	15	10	20	5	2	18	14	21	10
4	1	5	2	3	20	5	0	15	10	24	6	5	17	13

On peut cependant assez souvent disposer de cases que n'auraient pu remplir les tableaux ordinaires, en faisant le carré par quelqu'une des formes données ou toute autre. Ainsi, en formant le carré de 5 avec bordures, et composant le carré central avec la progression 1 . 4 . 7 . 10 . 13 . 16 . 19 . 22 . 25, on peut obtenir le carré (*planche* XXXVIII *bis, figure i*), où l'on verra 1 et 2 sur une même verticale, ce qui paraissait auparavant impossible.

Voici les tableaux qui auraient donné ce carré, tableaux qu'on ne peut soupçonner.

5	5	2	5	3	10	0	0	15	20
2	2	1	1	4	15	20	0	15	5
3	2	3	4	3	15	5	10	15	5
2	5	5	4	4	10	5	20	0	10
3	1	4	1	1	0	20	20	5	10

Si les tableaux en nombres sont difficiles à prévoir, il est aisé de faire le carré des différences, que voici :

$$\begin{array}{l} -2+8+11-7-10 \\ -4-9+12-3+4 \\ -5+6+0-6+5 \\ +1+3-12+9-1 \\ +10-8-11+7+2 \end{array}$$

On pourrait aussi composer d'abord l'horizontale et la verticale premières, comme, par exemple, 11+8−10−2 −7 pour l'horizontale, et 11 −12−9+3+7 pour la verticale. Il reste pour le carré de 3 les quatre différences 1, 4, 5, 6, plus 0 au centre; mais 4+1=5, et 5+1=6: donc 1 et 5 seront aux angles, et 4, 6 au milieu des lignes, et l'on pourrait avoir −5+6−1 en horizontale, et −5 +4+1 en verticale. Le carré serait :

$$\begin{array}{l} +11+8-10-2-7 \\ -12-5+6-1+12 \\ -9+4+0-4+9 \\ +3+1-6+5-3 \\ +7-8+10+2-11 \end{array}$$

Cette manière d'opérer serait la plus convenable pour pouvoir disposer de plusieurs cases; d'autres formes donneront d'autres cases à remplir de nombres convenus.

On ne s'appesantira pas davantage sur la question de savoir si l'on peut disposer de telle ou telle case : ce problème exige une discussion difficile pour chaque cas. Il est bon de remarquer cependant que l'on peut arriver au but proposé plus promptement, lorsque la racine est grande, que dans le cas contraire, à raison du plus grand nombre de formes que peut prendre le carré.

§ 9.

FORMULES D'EULER.

On a dit, page 215, que c'était un problème intéressant de trouver les combinaisons qui donneraient un nombre déterminé, avec tant de termes que l'on voudrait d'une progression arithmétique.

Le lecteur sera sans doute curieux de connaître une formule commode pour calculer ce nombre de manières. Cette formule se trouve dans l'ouvrage du plus illustre des mathématiciens, du père de l'algèbre, d'Euler enfin, au chapitre XVI de l'Introduction à l'analyse infinitésimale (traduction de Labey). Nous croyons devoir copier ici Euler, lequel, au commencement de ce chapitre, ayant pour titre *de la Partition des nombres*, s'exprime ainsi :

« Proposons-nous cette expression :

» $(1+x^{\alpha}z)(1+x^{\beta}z)$ $1+x^{\gamma}z)(1+x^{\delta}z)(1+x^{\epsilon}z)$,
» etc., et cherchons la forme qu'elle prendra, étant dé-
» veloppée par la multiplication. Supposons qu'elle devienne

» $1+Pz+Qz^2+Rz^3+Sz^4+$ etc.

» Il est évident que P sera la somme des puissances x^{α}
» $+x^{\beta}+x^{\gamma}+x^{\delta}+x^{\epsilon}+$ etc.; ensuite Q sera la somme
» des produits de deux puissances différentes, ou un as-
» semblage de plusieurs puissances de x, dont les expo-
» sans sont les sommes de deux termes différens de cette
» série :

» $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta$, etc.

» Semblablement R sera l'assemblage de puissances de » x dont les exposans sont les sommes de trois termes » différens ; et S sera un assemblage de puissances de x » dont les exposans sont les sommes de quatre termes dif- » férens de la même série α, β, γ, δ, etc., et ainsi de » suite.

» Chacune des puissances de x qui sont comprises dans » les valeurs des lettres P, Q, R, S, etc., aura l'unité pour » coefficient, si leurs exposans ne peuvent être formés que » d'une manière par les quantités α, β, γ, δ, etc.; mais » si l'exposant de la même puissance peut être de plusieurs » manières la somme de deux, de trois, ou de plusieurs » termes de la série α, β, γ, δ, etc., alors cette puis- » sance aura un coefficient qui contiendra l'unité autant » de fois. Par exemple, si Nx^n se trouve dans la valeur » de Q, ce sera une preuve que n peut être, d'un nom- » bre N de manières différentes, la somme de deux termes » différens de la série α, β, γ, δ, etc.; et si l'on trouve, » dans le développement des facteurs proposés, le terme » Nx^nz^m, son coefficient N indiquera de combien de ma- » nières différentes le nombre n peut être la somme de » m termes différens de la série α, β, γ, δ, etc.

» Ainsi le produit proposé $(1+x^\alpha z)(1+x^\beta z)(1+x^\gamma z)$ » $(1+x^\delta z)$, etc., étant effectivement développé par la » multiplication, le produit fera voir sur le champ de com- » bien de manières différentes un nombre donné peut être » la somme d'autant de termes différens qu'on voudra de » la série α, β, γ, δ, etc. Par exemple, si l'on cherche » de combien de manières différentes le nombre n peut

» être la somme de m termes différens de cette série, il faut » chercher le terme $x^n z^m$ dans l'expression développée, et » le coefficient de ce terme donnera le nombre demandé.

» Pour rendre cela plus sensible, prenons ce produit » composé d'une infinité de facteurs.

» $(1+xz)(1+x^2z)(1+x^3z)(1+x^4z)$, etc. »

Euler calcule quelques termes de ce produit. Nous avons poussé assez loin ce qu'il avait commencé; mais pour les carrés magiques le nombre des facteurs doit être déterminé. Le développement de la formule est prodigieusement long et fastidieux; le nombre des termes augmente rapidement; et, malgré les simplifications dont on peut faire usage, le défaut d'une loi pour les coefficiens entraîne à des calculs très-pénibles. Il y a cependant cela de commun avec le développement du binome, que, pour un même exposant de z, les coefficiens des puissances de x reviennent les mêmes à égale distance des extrêmes, ce qui diminue de moitié le travail. De plus, pour un autre exposant de z, tel que la somme de ce dernier avec le précédent soit égale au nombre des facteurs, les coefficiens sont encore les mêmes, ce qui abrége encore de moitié le calcul indispensable, qui se réduit au quart.

Avant de donner le développement, il faut présenter quelques éclaircissemens au moyen desquels on puisse faciliter les recherches que l'on se propose de faire.

1.° On peut reconnaître sur le champ les exposans qui affectent le premier et le dernier termes de x pour un exposant donné de z. En effet, soit m cet exposant : il n'y aura qu'à faire la somme des m premiers termes de la progres-

sion 1·2·3·4, etc., et l'on obtiendra le plus petit exposant de x. Quant au plus grand, soit F le nombre de facteurs que l'on a employés : il n'y aura qu'à ajouter m termes de la progression décroissante F, F—1, F—2, F—3, etc. : ainsi, pour z^6, la somme 1, 2, 3, 4, 5, 6 = 21, sera le plus petit exposant de x. Si l'on a employé 36 facteurs, on aura 36+35+34 + 33 + 32 + 31 = 201, pour le plus grand exposant. Il est essentiel de connaître ces plus petit et plus grand exposans de x pour un exposant donné de z et un nombre déterminé de facteurs. Cela abrège beaucoup les calculs.

2.° On trouve sur le champ, au moyen de ce qui précède, le nombre de termes en x qui multiplient une puissance de z. Ce nombre est égal à la différence des plus petit et plus grand exposans de x, différence à laquelle on ajoute l'unité. Ainsi, que ces exposans soient 10 et 42 : on aura 42—10+1=33 pour le nombre des termes; et, comme les coefficiens reviennent les mêmes à égale distance des extrêmes, il suffit de calculer les 17 premiers, puisque 33 est impair. On conçoit qu'il faut s'arrêter, dans ce cas, au terme moyen. Si le nombre des termes est pair, on calcule la moitié des coefficiens.

3.° (Et ceci est très-essentiel à retenir) puisque les coefficiens sont les mêmes pour z^m que pour z^{F-m}, F désignant le nombre des facteurs, il suit qu'il y aura 4 exposans de x qui répondront au même coefficient pour un nombre F impair de facteurs. Il n'y en aura cependant que 2 lorsque le nombre des termes sera impair, et ce seront les deux du milieu des séries qui multiplient z^m et

z^{F-m}. Mais si le nombre des facteurs est pair, il y aura un exposant de $z = \frac{F}{2}$, et alors la série qui multiplie $z^{\frac{F}{2}}$ sera seule. Il n'y aura, dans ce cas, que deux exposans de x qui aient le même coefficient; ce seront ceux qui affectent les termes à égale distance des extrêmes. Pour trouver ces quatre ou ces deux exposans de x qui ont le même coefficient, on connaît d'abord la somme des termes de la progression, dont le dernier est F. Cette somme est constante pour le même nombre de facteurs. On connaît également, pour chaque exposant de z, le plus petit et le plus grand exposant de x. Si l'exposant de z est plus petit que $\frac{F}{2}$, on fait la somme de ces deux exposans, et les deux nombres dont l'addition donne cette somme sont les exposans qui auront le même coefficient. Ainsi, par exemple : pour 12 facteurs, z^4 aura 10 et 42 pour les deux exposans extrêmes de x; la somme est 52 : donc x^{11} et x^{41}, x^{20} et x^{32}, etc., auront même coefficient deux à deux. Mais z^8 a les mêmes coefficiens de x que z^4, puisque $8+4=12=$le nombre des facteurs. D'un autre côté, $78=$ la somme des 12 premiers nombres, et cette somme est constante. Si l'on soustrait de 78 chacun des exposans 11 et 41, on aura 67 et 37, qui seront les deux autres exposans de x affectés des mêmes coefficiens. De même $78-20=58$, et $78-32=46$ seront des exposans qui auront le même coefficient que 20 et 32. Quant à 26, exposant moyen de x pour z^4, comme il est la moitié de 52, il n'a pas de correspondant. Par la même raison $78-26=52$ est le seul exposant de x pour z^8 qui ait le même coefficient que x^{26}. Pour z^6, dont l'exposant $=\frac{F}{2}$, on aura x^{21} et x^{57}, x^{30} et x^{48}, etc., affectés de co-

efficiens égaux. Si donc on veut savoir quel est le coefficient de x^{51}, par exemple, pour z^7 et 12 facteurs, soustrayant 51 de 78, on aura $78-51=27$: le coefficient sera donc le même que celui de x^{27}, qu'on suppose calculé. Si le terme sur léquel tombe le résultat de la soustraction était trop grand, on chercherait son correspondant pour z^5 : or le plus petit exposant de x pour z^5 est 15; le plus grand est 50 : $50-15=35$, et $35+1=36$, est le nombre des termes pour z^5. Qu'on demande le coefficient de x^{31} pour z^7 : on aurait $78-31=47$; le 18.e terme de la progression 15 . 16 . 17.... 50 est 32 : donc x^{47} n'a pas de coefficient calculé; il faut donc, de la somme $15+50=65$, soustraire 47, et il vient 18; donc x^{18} pour z^5 a le même coefficient que x^{31} pour z^7.

Il est bon de se servir des expressions suivantes pour connaître les plus petits et les plus grands exposans de x pour F facteurs, et m exposant de z. Le plus petit exposant est $S=(1+m)\frac{m}{2}$, et le plus grand est $S=m\left[F-\left(\frac{m-1}{2}\right)\right]$.

Nous allons maintenant donner les résultats de la multiplication pour les différens facteurs.

1 FACTEUR.

$1+xz$

2 FACTEURS.

$1+z(x+x^2)+z^2x^3$

3 FACTEURS.

$1+z(x+x^2+x^3)+z^2(x^3+x^4+x^5)+z^3x^6$

4 FACTEURS.

$1+z(x+x^2+x^3+x^4)+z^2(x^3+x^4+2x^5+x^6+x^7)+z^3(x^6+x^7+x^8+x^9)+z^4x^{10}$

5 FACTEURS.

$1+z(x+x^2+x^3+x^4+x^5)+z^2(x^3+x^4+2x^5+2x^6+2x^7+x^8+x^9)+z^3(x^6+x^7+2x^8+2x^9$
$+2x^{10}+x^{11}+x^{12})+z^4(x^{10}+x^{11}+x^{12}+x^{13}+x^{14})+z^5x^{15}$

6 FACTEURS.

$z^6x^{21}\ldots 1$

$z^5(x^{15}+x^{16}\ldots x^{20})\ldots z(x+x^2\ldots x^6)$

$z^4(x^{10}\ldots\ldots\ldots x^{18})\ldots z^2(x^3+x^4+2x^5+2x^6+3x^7\ldots x^{11})$

$z^3(x^6+x^7+2x^8+3x^9+3x^{10}\ldots x^{15})$

$z^7x^{28}\ldots 1$ 7 FACTEURS.

$z^6(x^{21}\ldots x^{27})\ldots z\,(x\ldots x^7)$

$z^5(x^{15}\ldots x^{25})\ldots z^2(x^3+x^4+2x^5+2x^6+3x^7+3x^8\ldots x^{13})$

$z^4(x^{10}\ldots x^{22})\ldots z^3(x^6+x^7+2x^8+3x^9+4x^{10}+4x^{11}+5x^{12}\ldots x^{18})$

$z^8\,x^{36}\ldots 1$ 8 FACTEURS.

$x^7(x^{28}\ldots x^{35})\ldots z\,(x\ldots x^8)$

$z^6(x^{21}\ldots x^{33})\ldots z^2(x^3+x^4+2x^5+2x^6+3x^7+3x^8+4x^9\ldots x^{15})$

$z^5(x^{15}\ldots x^{30})\ldots z^3(x^6+x^7+2x^8+3x^9+4x^{10}+5x^{11}+6x^{12}+6x^{13}\ldots x^{21})$

$z^4(x^{10}+x^{11}+2x^{12}+3x^{13}+5x^{14}+5x^{15}+7x^{16}+7x^{17}+8x^{18}\ldots x^{26})$

$z^9x^{45}\ldots 1$ 9 FACTEURS.

$z^8(x^{36}\ldots x^{44})\ldots z\,(x\ldots x^9)$

$z^7(x^{28}\ldots x^{42})\ldots z^2(x^3+x^4+2x^5+2x^6+3x^7+3x^8+4x^9+4x^{10}\ldots x^{17})$

$z^6(x^{21}\ldots x^{39})\ldots z^3(x^6+x^7+2x^8+3x^9+4x^{10}+5x^{11}+7x^{12}+7x^{13}+8x^{14}+8x^{15}\ldots x^{24})$

$z^5(x^{15}\ldots x^{35})\ldots z^4(x^{10}+x^{11}+2x^{12}+3x^{13}+5x^{14}+6x^{15}+8x^{16}+9x^{17}+11x^{18}+11x^{19}$
$+12x^{20}\ldots x^{30})$

10 FACTEURS.

$z^{10}x^{55}\ldots 1$

$z^{9}(x^{45}\ldots x^{54})\ldots z\,(x\ldots x^{10})$

$z^{8}(x^{36}\ldots x^{52})\ldots z^{2}(x^{3}+x^{4}+2x^{5}+2x^{6}+3x^{7}+3x^{8}+4x^{9}+4x^{10}+5x^{11}\ldots x^{19})$

$z^{7}(x^{28}\ldots x^{49})\ldots z^{3}(x^{6}+x^{7}+2x^{8}+3x^{9}+4x^{10}+5x^{11}+7x^{12}+8x^{13}+9x^{14}+10x^{15}+10x^{16}\ldots x^{27})$

$z^{6}(x^{21}\ldots x^{45})\ldots z^{4}(x^{10}+x^{11}+2x^{12}+3x^{13}+5x^{14}+6x^{15}+9x^{16}+10x^{17}+13x^{18}+14x^{19}+16x^{20}+16x^{21}+18x^{22}\ldots x^{34})$

$z^{5}(x^{15}+x^{16}+2x^{17}+3x^{18}+5x^{19}+7x^{20}+9x^{21}+11x^{22}+14x^{23}+16x^{24}+18x^{25}+19x^{26}+20x^{27}\ldots x^{40})$

11 FACTEURS.

$z^{11}x^{66}\ldots 1$

$z^{10}(x^{55}\ldots x^{65})\ldots z\,(x\ldots x^{11}).$

$z^{9}\,(x^{45}\ldots x^{63})\ldots z^{2}(x^{3}+x^{4}+2x^{5}+2x^{6}+3x^{7}+3x^{8}+4x^{9}+4x^{10}+5x^{11}+5x^{12}\ldots x^{21})$

$z^{8}\,(x^{36}\ldots x^{60})\ldots z^{3}(x^{6}+x^{7}+2x^{8}+3x^{9}+4x^{10}+5x^{11}+7x^{12}+8x^{13}+10x^{14}+11x^{15}+12x^{16}+12x^{17}+13x^{18}\ldots x^{30})$

$z^7\,(x^{28}\ldots x^{56})\ldots z^4(x^{10}+x^{11}+2x^{12}+3x^{13}+5x^{14}+6x^{15}+9x^{16}+11x^{17}+14x^{18}+16x^{19}$
$+19x^{20}+20x^{21}+23x^{22}+23x^{23}+24x^{24}\ldots x^{38})$

$z^6\,(x^{21}\ldots x^{51})\ldots z^5(x^{15}+x^{16}+2x^{17}+3x^{18}+5x^{19}+7x^{20}+10x^{21}+12x^{22}+16x^{23}+19x^{24}$
$+23x^{25}+25x^{26}+29x^{27}+30x^{28}+31x^{29}+32x^{30}\ldots x^{45})$

12 FACTEURS.

$z^{12}x^{78}\ldots 1$

$z^{11}(x^{66}\ldots x^{77})\ldots z\,(x\ldots x^{12})$

$z^{10}(x^{55}\ldots x^{75})\ldots z^2(x^3+x^4+2x^5+2x^6+3x^7+3x^8+4x^9+4x^{10}+5x^{11}+5x^{12}+6x^{13}\ldots x^{23})$

$z^9\,(x^{45}\ldots x^{72})\ldots z^3(x^6+x^7+2x^8+3x^9+4x^{10}+5x^{11}+7x^{12}+8x^{13}+10x^{14}+12x^{15}+13x^{16}$
$+14x^{17}+15x^{18}+15x^{19}\ldots x^{33})$

$z^8\,(x^{36}\ldots x^{68})\ldots z^4(x^{10}+x^{11}+2x^{12}+3x^{13}+5x^{14}+6x^{15}+9x^{16}+11x^{17}+15x^{18}+17x^{19}$
$+21x^{20}+23x^{21}+27x^{22}+28x^{23}+31x^{24}+31x^{25}+33x^{26}\ldots x^{42})$

$z^7\,(x^{28}\ldots x^{63})\ldots z^5(x^{15}+x^{16}+2x^{17}+3x^{18}+5x^{19}+7x^{20}+10x^{21}+13x^{22}+17x^{23}+21x^{24}$
$+26x^{25}+30x^{26}+35x^{27}+39x^{28}+43x^{29}+46x^{30}+48x^{31}+49x^{32}\ldots x^{50})$

$z^6\,(x^{21}+x^{22}+2x^{23}+3x^{24}+5x^{25}+7x^{26}+11x^{27}+13x^{28}+18x^{29}+22x^{30}+28x^{31}+32x^{32}$
$+39x^{33}+42x^{34}+48x^{35}+51x^{36}+55x^{37}+55x^{38}+58x^{39}\ldots x^{57})$

13 FACTEURS.

$z^{13}x^{91}\ldots 1$

$z^{12}(x^{78}\ldots x^{90})\ldots z\,(x\ldots x^{12})$

$x^{11}(x^{66}\ldots x^{88})\ldots z^{2}(x^{3}+x^{4}+2x^{5}+2x^{6}+3x^{7}+3x^{8}+4x^{9}+4x^{10}+5x^{11}+5x^{12}+6x^{13}$
$+6x^{14}\ldots x^{25})$

$z^{10}(x^{55}\ldots x^{85})\ldots z^{3}(x^{6}+x^{7}+2x^{8}+3x^{9}+4x^{10}+5x^{11}+7x^{12}+8x^{13}+10x^{14}+12x^{15}+14x^{16}$
$+15x^{17}+17x^{18}+17x^{19}+18x^{20}+18x^{21}\ldots x^{36})$

$z^{9}\,(x^{45}\ldots x^{81})\ldots z^{4}(x^{10}+x^{11}+2x^{12}+3x^{13}+5x^{14}+6x^{15}+9x^{16}+11x^{17}+15x^{18}+18x^{19}$
$+22x^{20}+25x^{21}+30x^{22}+32x^{23}+36x^{24}+38x^{25}+41x^{26}+41x^{27}$
$+43x^{28}\ldots x^{46})$

$z^{8}\,(x^{36}\ldots x^{76})\ldots z^{5}(x^{15}+x^{16}+2x^{17}+3x^{18}+5x^{19}+7x^{20}+10x^{21}+13x^{22}+18x^{23}+22x^{24}$
$+28x^{25}+33x^{26}+40x^{27}+45x^{28}+52x^{29}+57x^{30}+63x^{31}+66x^{32}+70x^{33}$
$+71x^{34}+73x^{35}\ldots x^{55})$

$z^{7}\,(x^{28}\ldots x^{70})\ldots z^{6}(x^{21}+x^{22}+2x^{23}+3x^{24}+5x^{25}+7x^{26}+11x^{27}+14x^{28}+19x^{29}+24x^{30}$
$+31x^{31}+37x^{32}+46x^{33}+52x^{34}+61x^{35}+68x^{36}+76x^{37}+81x^{38}+88x^{39}$
$+90x^{40}+94x^{41}+94x^{42}\ldots x^{63})$

14 FACTEURS.

$z^{14}x^{105}\ldots 1$

$z^{13}(x^{91}\ldots x^{104})\ldots z\,(x\ldots x^{14})$

$z^{12}(x^{78}\ldots x^{102})\ldots z^{2}(x^{3}+x^{4}+2x^{5}+2x^{6}+3x^{7}+3x^{8}+4x^{9}+4x^{10}+5x^{11}+5x^{12}+6x^{13}+6x^{14}$
$+7x^{15}\ldots x^{27})$

$z^{11}(x^{66}\ldots x^{99})\ldots z^{3}(x^{6}+x^{7}+2x^{8}+3x^{9}+4x^{10}+5x^{11}+7x^{12}+8x^{13}+10x^{14}+12x^{15}+14x^{16}$
$+16x^{17}+18x^{18}+19x^{19}+20x^{20}+21x^{21}+21x^{22}\ldots x^{39})$

$z^{10}(x^{55}\ldots x^{95})\ldots z^{4}(x^{10}+x^{11}+2x^{12}+3x^{13}+5x^{14}+6x^{15}+9x^{16}+11x^{17}+15x^{18}+18x^{19}$
$+23x^{20}+26x^{21}+32x^{22}+35x^{23}+40x^{24}+43x^{25}+48x^{26}+49x^{27}+53x^{28}$
$+53x^{29}+55x^{30}\ldots x^{50})$

$z^{9}\,(x^{45}\ldots x^{90})\ldots z^{5}(x^{15}+x^{16}+2x^{17}+3x^{18}+5x^{19}+7x^{20}+10x^{21}+13x^{22}+18x^{23}+23x^{24}$
$+29x^{25}+35x^{26}+43x^{27}+50x^{28}+58x^{29}+66x^{30}+74x^{31}+81x^{32}+88x^{33}$
$+93x^{34}+98x^{35}+101x^{36}+102x^{37}\ldots x^{60})$

$z^{8}\,(x^{36}\ldots x^{84})\ldots z^{6}(x^{21}+x^{22}+2x^{23}+3x^{24}+5x^{25}+7x^{26}+11x^{27}+14x^{28}+20x^{29}+25x^{30}$
$+33x^{31}+40x^{32}+51x^{33}+59x^{34}+71\,x^{35}+81x^{36}+94x^{37}+103x^{38}$
$+116x^{39}+123x^{40}+134x^{41}+139x^{42}+146x^{43}+147x^{44}+151x^{45}\ldots x^{60})$

$z^7\,(x^{28}+x^{29}+2x^{30}+3x^{31}+5x^{32}+7x^{33}+11x^{34}+15x^{35}+20x^{36}+26x^{37}+34x^{38}+42x^{39}$
$+53x^{40}+63x^{41}+75x^{42}+87x^{43}+100x^{44}+112x^{45}+125x^{46}+136x^{47}+146x^{48}+155x^{49}$
$+162x^{50}+166x^{51}+169x^{52}\ldots x^{77})$

15 FACTEURS.

$z^{15}\ldots x^{120}\ldots 1$

$z^{14}(x^{105}\ldots x^{119})\ldots z\,(x\ldots x^{15})$

$z^{13}(x^{91}\ldots x^{117})\ldots z^2(x^3+x^4+2x^5+2x^6+3x^7+3x^8+4x^9+4x^{10}+5x^{11}+5x^{12}+6x^{13}+6x^{14}$
$+7x^{15}+7x^{16}\ldots x^{29})$

$z^{12}(x^{78}\ldots x^{114})\ldots z^3(x^6+x^7+2x^8+3x^9+4x^{10}+5x^{11}+7x^{12}+8x^{13}+10x^{14}+12x^{15}+14x^{16}$
$+16x^{17}+19x^{18}+20x^{19}+22x^{20}+23x^{21}+24x^{22}+24x^{23}+25x^{24}\ldots x^{42})$

$z^{11}(x^{66}\ldots x^{110})\ldots z^4(x^{10}+x^{11}+2x^{12}+3x^{13}+5x^{14}+6x^{15}+9x^{16}+11x^{17}+15x^{18}+18x^{19}$
$+23x^{20}+27x^{21}+33x^{22}+37x^{23}+43x^{24}+47x^{25}+53x^{26}+56x^{27}$
$+61x^{28}+63x^{29}+67x^{30}+67x^{31}+69x^{32}\ldots x^{54})$

$z^{10}(x^{55}\dots x^{105})\dots z^{5}(x^{15}+x^{16}+2x^{17}+3x^{18}+5x^{19}+7x^{20}+10x^{21}+13x^{22}+18x^{23}+23x^{24}$
$+30x^{25}+36x^{26}+45x^{27}+53x^{28}+63x^{29}+72x^{30}+83x^{31}+92x^{32}$
$+103x^{33}+111x^{34}+121x^{35}+127x^{36}+134x^{37}+137x^{38}+141x^{39}$
$+141x^{40}\dots x^{65})$

$z^{9}(x^{45}\dots x^{99})\dots z^{6}(x^{21}+x^{22}+2x^{23}+3x^{24}+5x^{25}+7x^{26}+11x^{27}+14x^{28}+20x^{29}+26x^{30}$
$+34x^{31}+42x^{32}+54x^{33}+64x^{34}+78x^{35}+91x^{36}+107x^{37}+121x^{38}$
$+139x^{39}+152x^{40}+169x^{41}+182x^{42}+196x^{43}+205x^{44}+217x^{45}$
$+221x^{46}+227x^{47}+227x^{48}\dots x^{75})$

$z^{8}(x^{36}\dots x^{92})\dots z^{7}(x^{28}+x^{29}+2x^{30}+3x^{31}+5x^{32}+7x^{33}+11x^{34}+15x^{35}+21x^{36}+27x^{37}$
$+36x^{38}+45x^{39}+58x^{40}+70x^{41}+86x^{42}+101x^{43}+120x^{44}+137x^{45}$
$+158x^{46}+176x^{47}+197x^{48}+214x^{49}+233x^{50}+247x^{51}+263x^{52}$
$+272x^{53}+282x^{54}+285x^{55}+289x^{56}\dots x^{84})$

16 FACTEURS.

$z^{16}x^{136}\dots 1$

$z^{15}(x^{120}\dots x^{135})\dots z\,(x\dots x^{16})$

$$z^{14}(x^{105}\ldots x^{133})\ldots z^{2}(x^{3}+x^{4}+2x^{5}+2x^{6}+3x^{7}+3x^{8}+4x^{9}+4x^{10}+5x^{11}+5x^{12}+6x^{13}+6x^{14}$$
$$+7x^{15}+7x^{16}+8x^{17}\ldots x^{31})$$

$$z^{13}(x^{91}\ldots x^{130})\ldots z^{3}(x^{6}+x^{7}+2x^{8}+3x^{9}+4x^{10}+5x^{11}+7x^{12}+8x^{13}+10x^{14}+12x^{15}+14x^{16}$$
$$+16x^{17}+19x^{18}+21x^{19}+23x^{20}+25x^{21}+26x^{22}+27x^{23}+28x^{24}$$
$$+28x^{25}\ldots x^{45})$$

$$z^{12}(x^{78}\ldots x^{126})\ldots z^{4}(x^{10}+x^{11}+2x^{12}+3x^{13}+5x^{14}+6x^{15}+9x^{16}+11x^{17}+15x^{18}+18x^{19}$$
$$+23x^{20}+27x^{21}+34x^{22}+38x^{23}+45x^{24}+50x^{25}+57x^{26}+61x^{27}$$
$$+68x^{28}+71x^{29}+77x^{30}+79x^{31}+83x^{32}+83x^{33}+86x^{34}\ldots x^{58})$$

$$z^{11}(x^{66}\ldots x^{121})\ldots z^{5}(x^{15}+x^{16}+2x^{17}+3x^{18}+5x^{19}+7x^{20}+10x^{21}+13x^{22}+18x^{23}+23x^{24}$$
$$+30x^{25}+37x^{26}+46x^{27}+55x^{28}+66x^{29}+77x^{30}+89x^{31}+101x^{32}$$
$$+114x^{33}+126x^{34}+139x^{35}+150x^{36}+161x^{37}+170x^{38}+178x^{39}$$
$$+184x^{40}+188x^{41}+190x^{42}\ldots x^{70})$$

$$z^{10}(x^{55}\ldots x^{115})\ldots z^{6}(x^{21}+x^{22}+2x^{23}+3x^{24}+5x^{25}+7x^{26}+11x^{27}+14x^{28}+20x^{29}+26x^{30}$$
$$+35x^{31}+43x^{32}+56x^{33}+67x^{34}+83x^{35}+98x^{36}+117x^{37}+134x^{38}$$
$$+157x^{39}+175x^{40}+199x^{41}+218x^{42}+241x^{43}+258x^{44}+280x^{45}$$
$$+293x^{46}+310x^{47}+319x^{48}+330x^{49}+332x^{50}+338x^{51}\ldots x^{81})$$

$$z^9(x^{45}\ldots x^{108})\ldots z^7(x^{28}+x^{29}+2x^{30}+3x^{31}+5x^{32}+7x^{33}+11x^{34}+15x^{35}+21x^{36}+28x^{37}$$
$$+37x^{38}+47x^{39}+61x^{40}+75x^{41}+93x^{42}+112x^{43}+134x^{44}+157x^{45}$$
$$+184x^{46}+210x^{47}+239x^{48}+268x^{49}+297x^{50}+325x^{51}+354x^{52}$$
$$+379x^{53}+403x^{54}+424x^{55}+441x^{56}+454x^{57}+464x^{58}+468x^{59}\ldots x^{91})$$

$$z^8(x^{36}+x^{37}+2x^{38}+3x^{39}+5x^{40}+7x^{41}+11x^{42}+15x^{43}+22x^{44}+28x^{45}+38x^{46}+48x^{47}$$
$$+63x^{48}+77x^{49}+97x^{50}+116x^{51}+141x^{52}+164x^{53}+194x^{54}+221x^{55}+255x^{56}+284x^{57}$$
$$+319x^{58}+348x^{59}+383x^{60}+409x^{61}+440x^{62}+461x^{63}+486x^{64}+499x^{65}+515x^{66}$$
$$+519x^{67}+526x^{68}\ldots x^{100})$$

On a dit et nous répétons ici, attendu la forme abréviative adoptée, qu'il est facile de trouver, d'après les formules ci-dessus, la quantité de manières dont on peut faire un nombre avec tant de termes qu'on voudra de la progression naturelle poussée jusqu'à une certaine limite: ainsi, qu'on demande de combien de manières on peut faire 100 avec 11 termes de la progression naturelle bornée à 16 termes. Puisque z^{11} correspond à z^5, on ajoutera 66, plus petit exposant de x dans z^{11}, avec 70, plus grand exposant de x dans z^5, ou bien 121 à 15 : on aura 136. Otant 100, il suit que x^{36} dans z^5 aura même coefficient que x^{100} pour z^{11}. Le coefficient de x^{36} est 150 : donc on peut faire 100 avec 11 termes de 150 manières. De plus, puisque 15+

$7=85$, on aurait $85-36=49$ pour exposant de x dans z^5, et 49 se ferait aussi de 150 manières avec 5 nombres. Enfin $66+121=187$ donnerait $187-100=87$, qui se ferait de 150 manières avec 11 termes : donc 36, 49, 87 et 100, se feront tous de 150 manières, les deux premiers avec 5 termes, les deux derniers avec 11.

17 FACTEURS.

Les lacunes ponctuées entre les premières valeurs de x et les suivantes, doivent être remplies, comme elles le sont pour 16 facteurs.

$z^{17}x^{153}\ldots 1$

$z^{16}(x^{136}\ldots x^{152})\ldots z\,(x+x^2\ldots x^{17})$

$z^{15}(x^{120}\ldots x^{150})\ldots z^2(x^3+x^4+2^5+2x^6+3x^7+3x^8+4x^9+4x^{10}+5x^{11}+5x^{12}+6x^{13}+6x^{14}$
$+7x^{15}+7x^{16}+8x^{17}+8x^{18}\ldots x^{33})$

$z^{14}(x^{105}\ldots x^{147})\ldots z^3(x^6+x^7+2x^8+3x^9+4x^{10}+5x^{11}+7x^{12}+8x^{13}+10x^{14}+12x^{15}+14x^{16}$
$+16x^{17}+19x^{18}+21x^{19}+24x^{20}+26x^{21}+28^{22}x+29x^{23}+31x^{24}+31x^{25}$
$+32x^{26}+32x^{27}\ldots x^{48})$

$z^{13}(x^{91}\ldots x^{143}\ldots z^4(x^{10}\ldots 39x^{23}+46x^{24}+52x^{25}+60x^{26}+65x^{27}+73x^{28}+78x^{29}+85x^{30}$
$+89x^{31}+95x^{32}+97x^{33}+102x^{34}+102x^{35}+104x^{36}\ldots x^{62})$

$$z^{12}(x^{78}\ldots x^{138})\ldots z^{5}(x^{15}\ldots 47x^{27}+56x^{28}+68x^{29}+80x^{30}+94x^{31}+107x^{32}+123x^{33}+137x^{34}$$
$$+154x^{35}+168x^{36}+184x^{37}+197x^{38}+212x^{39}+222x^{40}+233x^{41}$$
$$+240x^{42}+247x^{43}+249x^{44}+252x^{45}\ldots x^{75})$$

$$z^{11}(x^{66}\ldots x^{132})\ldots z^{6}(x^{21}\ldots 44x^{32}+57x^{33}+69x^{34}+86x^{35}+103x^{36}+124x^{37}+144x^{38}$$
$$+170x^{39}+193x^{40}+222x^{41}+248x^{42}+278x^{43}+304x^{44}+335x^{45}$$
$$+359x^{46}+387x^{47}+408x^{48}+431x^{49}+446x^{50}+464x^{51}+471x^{52}$$
$$+480x^{53}+480x^{54}\ldots x^{87})$$

$$z^{10}(x^{55}\ldots x^{125})\ldots z^{7}(x^{28}\ldots 38x^{38}+48x^{39}+63x^{40}+78x^{41}+98x^{42}+119x^{43}+145x^{44}+171x^{45}$$
$$+204x^{46}+236x^{47}+274x^{48}+311x^{49}+353x^{50}+392x^{51}+437x^{52}$$
$$+477x^{53}+520x^{54}+558x^{55}+598x^{56}+629x^{57}+663x^{58}+686x^{59}$$
$$+709x^{60}+722x^{61}+734x^{62}+734x^{63}\ldots x^{98})$$

$$z^{9}(x^{45}\ldots x^{117})\ldots z^{8}(x^{36}\ldots 29x^{45}+39x^{46}+50x^{47}+66x^{48}+82x^{49}+104x^{50}+127x^{51}+156x^{52}$$
$$+185x^{53}+222x^{54}+258x^{55}+302x^{56}+345x^{57}+394x^{58}+441x^{59}$$
$$+495x^{60}+543x^{61}+597x^{62}+645x^{63}+696x^{64}+738x^{65}+783x^{66}$$
$$+816x^{67}+851x^{68}+873x^{69}+894x^{70}+902x^{71}+910x^{72}\ldots x^{108})$$

18 FACTEURS.

$z^{18}x^{171}, \ldots 1$

$z^{17}(x^{153} \ldots x^{170}) \ldots z\,(x+x^{2} \ldots x^{18})$

$z^{16}(x^{136} \ldots x^{168}) \ldots z^{2}(x^{3}+x^{4} \ldots 8x^{18}+9x^{19} \ldots x^{35})$

$z^{15}(x^{120} \ldots x^{165}) \ldots z^{3}(x^{6} \ldots 24x^{20}+27x^{21}+29x^{22}+31x^{23}+33x^{24}+34x^{25}+35x^{26}+36x^{27}$
$+36x^{28} \ldots x^{51})$

$z^{14}(x^{105} \ldots x^{161}) \ldots z^{4}(x^{10} \ldots 39x^{23}+47x^{24}+53x^{25}+62x^{26}+68x^{27}+77x^{28}+83x^{29}+92x^{30}$
$+97x^{31}+105x^{32}+109x^{33}+116x^{34}+118x^{35}+123x^{36}+123x^{37}$
$+126x^{38} \ldots x^{66})$

$z^{13}(x^{91} \ldots x^{156}) \ldots z^{5}(x^{15} \ldots 47x^{27}+57x^{28}+69x^{29}+82x^{30}+97x^{31}+112x^{32}+129x^{33}+146x^{34}$
$+165x^{35}+183x^{36}+202x^{37}+220x^{38}+239x^{39}+256x^{40}+272x^{41}$
$+286x^{42}+299x^{43}+309x^{44}+317x^{45}+322x^{46}+325x^{47} \ldots x^{80})$

$z^{12}(x^{78} \ldots x^{150}) \ldots z^{6}(x^{21} \ldots 44x^{32}+58x^{33}+70x^{34}+88x^{35}+106x^{36}+129x^{37}+151x^{38}+180x^{39}$
$+206x^{40}+240x^{41}+271x^{42}+308x^{43}+341x^{44}+382x^{45}+415x^{46}$
$+455x^{47}+488x^{48}+525x^{49}+553x^{50}+587x^{51}+608x^{52}+634x^{53}$
$+648x^{54}+664x^{55}+668x^{56}+676x^{57} \ldots x^{93})$

$$z^{11}(x^{66}\ldots x^{143})\ldots z^{7}(x^{28}\ldots 38x^{38}+49x^{39}+64x^{40}+80x^{41}+101x^{42}+124x^{43}+152x^{44}+182x^{45}$$
$$+218x^{46}+256x^{47}+300x^{48}+346x^{49}+397x^{50}+449x^{51}+506x^{52}$$
$$+563x^{53}+623x^{54}+682x^{55}+742x^{56}+799x^{57}+856x^{58}+908x^{59}$$
$$+957x^{60}+1000x^{61}+1038x^{62}+1069x^{63}+1093x^{64}+1109x^{65}$$
$$+1117x^{66}\ldots x^{105})$$

$$z^{10}(x^{55}\ldots x^{135})\ldots z^{8}(x^{36}\ldots 29x^{45}+40x^{46}+51x^{47}+68x^{48}+85x^{49}+109x^{50}+134x^{51}+167x^{52}$$
$$+200x^{53}+243x^{5}+286x^{55}+340x^{56}+393x^{57}+457x^{58}+519x^{59}$$
$$+593x^{60}+662x^{61}+742x^{62}+816x^{63}+900x^{64}+974x^{65}+1057x^{66}$$
$$+1127x^{67}+1204x^{68}+1265x^{69}+1331x^{70}+1379x^{71}+1430x^{72}$$
$$+1460x^{73}+1492x^{74}+1502x^{75}+1514x^{76}\ldots x^{116})$$

$$z^{9}(x^{45}+x^{46}+2x^{47}+3x^{48}+5x^{49}+7x^{50}+11x^{51}+15x^{52}+22x^{53}+30x^{54}+40x^{55}+52x^{56}$$
$$+69x^{57}+87x^{58}+111x^{59}+138x^{60}+171x^{61}+207x^{62}+251x^{63}+297x^{64}+352x^{65}+411x^{66}$$
$$+476x^{67}+545x^{68}+622x^{69}+699x^{70}+782x^{71}+867x^{72}+954x^{73}+1040x^{74}+1128x^{75}$$
$$+1210x^{76}+1292x^{77}+1368x^{78}+1437x^{79}+1499x^{80}+1555x^{81}+1598x^{82}+1632x^{83}$$
$$+1656x^{84}+1667x^{85}\ldots x^{126})$$

19 FACTEURS.

$z^{19}x^{190}\dots 1$

$z^{18}(x^{171}\dots x^{189})\dots z\,(x+x^2\dots x^{19})$

$z^{17}(x^{153}\dots x^{187})\dots z^2(x^3+x^4\dots 8x^{18}+9x^{19}+9x^{20}\dots x^{37})$

$z^{16}(x^{136}\dots x^{184})\dots z^3(x^6\dots 24x^{20}+27x^{21}+30x^{22}+32x^{23}+35x^{24}+36x^{25}+38x^{26}+39x^{27}$
$+40x^{28}+40x^{29}+41x^{30}\dots x^{54})$

$z^{15}(x^{120}\dots x^{180})\dots z^4(x^{10}\dots 39x^{23}+47x^{24}+54x^{25}+63x^{26}+70x^{27}+80x^{28}+87x^{29}+97x^{\ 0}$
$+104x^{31}+113x^{32}+119x^{33}+128x^{34}+132x^{35}+139x^{36}+142x^{37}$
$+147x^{38}+147x^{39}+150x^{40}\dots x^{70})$

$z^{14}(x^{105}\dots x^{175})\dots z^5(x^{15}\dots 47x^{27}+57x^{28}+70x^{29}+83x^{30}+99x^{31}+115x^{32}+134x^{33}+152x^{34}$
$+174x^{35}+194x^{36}+217x^{37}+238x^{38}+262x^{39}+283x^{40}+306x^{41}$
$+325x^{42}+346x^{43}+362x^{44}+379x^{45}+390x^{46}+402x^{47}+408x^{48}$
$+414x^{49}+414x^{50}\dots x^{85})$

$z^{13}(x^{91}\ldots x^{169})\ldots z^{6}(x^{21}\ldots 44x^{32}+58x^{33}+71x^{34}+89x^{35}+108x^{36}+132x^{37}+156x^{38}+187x^{39}$
$+216x^{40}+253x^{41}+289x^{42}+331x^{43}+371x^{44}+419x^{45}+462x^{46}$
$+512x^{47}+557x^{48}+607x^{49}+650x^{50}+699x^{51}+737x^{52}+780x^{53}$
$+813x^{54}+847x^{55}+870x^{56}+896x^{57}+907x^{58}+920x^{59}+920x^{60}\ldots x^{99})$

$z^{12}(x^{78}\ldots x^{162})\ldots z^{7}(x^{28}\ldots 38x^{38}+49x^{39}+65x^{40}+81x^{41}+103x^{42}+127x^{43}+157x^{44}+189x^{45}$
$+229x^{46}+270x^{47}+320x^{48}+372x^{49}+432x^{50}+493x^{51}+564x^{52}$
$+633x^{53}+711x^{54}+788x^{55}+871x^{56}+950x^{57}+1036x^{58}+1114x^{59}$
$+1197x^{60}+1271x^{61}+1346x^{62}+1410x^{63}+1475x^{64}+1524x^{65}$
$+1572x^{66}+1605x^{67}+1634x^{68}+1646x^{69}+1656x^{70}\ldots x^{112})$

$z^{11}(x^{66},\ldots x^{154}),\ldots z^{8}(x^{36}\ldots 29x^{45}+40x^{46}+52x^{47}+69x^{48}+87x^{49}+112x^{50}+139x^{51}+174x^{52}$
$+211x^{53}+258x^{54}+307x^{55}+368x^{56}+431x^{57}+506x^{58}+583x^{59}$
$+673x^{60}+763x^{61}+866x^{62}+968x^{63}+1082x^{64}+1192x^{65}+1313x^{66}$
$+1427x^{67}+1550x^{68}+1662x^{69}+1780x^{70}+1885x^{71}+1993x^{72}$
$+2083x^{73}+2174x^{74}+2244x^{75}+2313x^{76}+2358x^{77}+2400x^{78}$
$+2417x^{79}+2430x^{80}\ldots x^{124})$

$z^{10}(x^{55} \ldots x^{145}) \ldots z^{9}(x^{45} + x^{46} + 2x^{47} + 3x^{48} + 5x^{49} + 7x^{50} + 11x^{51} + 15x^{52} + 22x^{53} + 30x^{54}$
$+ 41x^{55} + 53x^{56} + 71x^{57} + 90x^{58} + 116x^{59} + 145x^{60} + 182x^{61} + 222x^{62}$
$+ 273x^{63} + 326x^{64} + 392x^{65} + 462x^{66} + 544x^{67} + 630x^{68} + 731x^{69}$
$+ 833x^{70} + 949x^{71} + 1067x^{72} + 1197x^{73} + 1326x^{74} + 1468x^{75} + 1603x^{76}$
$+ 1749x^{77} + 1887x^{78} + 2030x^{79} + 2161x^{80} + 2297x^{81} + 2414x^{82}$
$+ 2532x^{83} + 2630x^{84} + 2724x^{85} + 2794x^{86} + 2860x^{87} + 2897x^{88}$
$+ 2929x^{89} + 2934x^{90} \ldots x^{135})$

20 FACTEURS.

$z^{20}x^{210} \ldots 1$

$z^{19}(x^{190} \ldots x^{209}) \ldots z\ (x + x^{2} + \ldots x^{20})$

$z^{18}(x^{171} \ldots x^{207}) \ldots z^{2}\ (x^{3} + x^{4} \ldots 8x^{18} + 9x^{19} + 9x^{20} + 10^{21} \ldots x^{39})$

$z^{17}(x^{153} \ldots x^{204}) \ldots z^{3}\ (x^{6} \ldots 24x^{20} + 27x^{21} + 30x^{22} + 33x^{23} + 36x^{24} + 38x^{25} + 40x^{26} + 42x^{27}$
$+ 43x^{28} + 44x^{29} + 45x^{30} + 45x^{31} \ldots x^{57})$

$z^{16}(x^{136} \ldots x^{200}) \ldots z^{4}\ (x^{10} \ldots 39x^{23} + 47x^{24} + 54x^{25} + 64x^{26} + 71x^{27} + 82x^{28} + 90x^{29} + 101x^{30}$
$+ 109x^{31} + 120x^{32} + 127x^{33} + 138x^{34} + 144x^{35} + 153x^{36} + 158x^{37}$
$+ 166x^{38} + 168x^{39} + 174x^{40} + 174x^{41} + 177x^{42} \ldots x^{74})$

$$z^{15}(x^{120}\ldots x^{195})\ldots z^{5}(x^{15}\ldots\ 47x^{27}+57x^{28}+70x^{29}+84x^{30}+100x^{31}+117x^{32}+137x^{33}$$
$$+157x^{34}+180x^{35}+203x^{36}+228x^{37}+253x^{38}+280x^{39}+306x^{40}$$
$$+333x^{41}+359x^{42}+385x^{43}+409x^{44}+433x^{45}+453x^{46}+472x^{47}$$
$$+488x^{48}+501x^{49}+511x^{50}+518x^{51}+521x^{52}\ldots x^{90})$$

$$z^{14}(x^{108}\ldots x^{189})\ldots z^{6}(x^{21}\ldots\ 44x^{32}+58x^{33}+71x^{34}+90x^{35}+109x^{36}+134x^{37}+159x^{38}$$
$$+192x^{39}+223x^{40}+263x^{41}+302x^{42}+349x^{43}+394x^{44}+449x^{45}$$
$$+499x^{46}+559x^{47}+614x^{48}+677x^{49}+733x^{50}+798x^{51}+852x^{52}$$
$$+914x^{53}+965x^{54}+1021x^{55}+1064x^{56}+1113x^{57}+1145x^{58}$$
$$+1182x^{59}+1203x^{60}+1226x^{61}+1232x^{62}+1242x^{63}\ldots x^{105})$$

$$z^{13}(x^{91}\ldots x^{182})\ldots z^{7}(x^{28}\ldots\ 38x^{38}+49x^{39}+65x^{40}+82x^{41}+104x^{42}+129x^{43}+160x^{44}$$
$$+194x^{45}+236x^{46}+281x^{47}+334x^{48}+392x^{49}+458x^{50}+528x^{51}$$
$$+608x^{52}+691x^{53}+782x^{54}+877x^{55}+979x^{56}+1082x^{57}+1192x^{58}$$
$$+1301x^{59}+1413x^{60}+1524x^{61}+1635x^{62}+1741x^{63}+1846x^{64}$$
$$+1943x^{65}+2034x^{66}+2117x^{67}+2191x^{68}+2253x^{69}+2306x^{70}$$
$$+2345x^{71}+2371x^{72}+2385x^{73}\ldots x^{119})$$

$$z^{12}(x^{78}\dots x^{174})\dots z^{8}(x^{36}\dots 29x^{45}+40x^{46}+52x^{47}+70x^{48}+88x^{49}+114x^{50}+142x^{51}+179x^{52}$$
$$+218x^{53}+269x^{54}+322x^{55}+389x^{56}+459x^{57}+544x^{58}+632x^{59}$$
$$+738x^{60}+844x^{61}+969x^{62}+1095x^{63}+1239x^{64}+1381x^{65}+1542x^{66}$$
$$+1697x^{67}+1870x^{68}+2034x^{69}+2212x^{70}+2378x^{71}+2557x^{72}+2716x^{73}$$
$$+2885x^{74}+3032x^{75}+3184x^{76}+3308x^{77}+3436x^{78}+3531x^{79}$$
$$+3627x^{80}+3688x^{81}+3746x^{82}+3768x^{83}+3788x^{84}\dots x^{132})$$

$$z^{11}(x^{66}\dots x^{165})\dots z^{9}(x^{45}+x^{46}+2x^{47}+3x^{48}+5x^{49}+7x^{50}+11x^{51}+15x^{52}+22x^{53}+30x^{54}$$
$$+41x^{55}+54x^{56}+72x^{57}+92x^{58}+119x^{59}+150x^{60}+189x^{61}+233x^{62}$$
$$+288x^{63}+348x^{64}+421x^{65}+502x^{66}+596x^{67}+699x^{68}+818x^{69}$$
$$+945x^{70}+1088x^{71}+1241x^{72}+1408x^{73}+1584x^{74}+1775x^{75}$$
$$+1971x^{76}+2180x^{77}+2393x^{78}+2613x^{79}+2834x^{80}+3060x^{81}$$
$$+3280x^{82}+3500x^{83}+3712x^{84}+3916x^{85}+4107x^{86}+4287x^{87}$$
$$+4447x^{88}+4591x^{89}+4714x^{90}+4814x^{91}+4890x^{92}+4943x^{93}$$
$$+4968x^{94}\dots x^{144})$$

$z^{10}(x^{55}+x^{56}+2x^{57}+3x^{58}+5x^{59}+7x^{60}+11x^{61}+15x^{62}+22x^{63}+30x^{64}+42x^{65}+54x^{66}$
$+73x^{67}+93x^{68}+121x^{69}+152x^{70}+193x^{71}+237x^{72}+295x^{73}+356x^{74}+433x^{75}$
$+515x^{76}+615x^{77}+720x^{78}+847x^{79}+978x^{80}+1131x^{81}+1289x^{82}+1470x^{83}+1652x^{84}$
$+1860x^{85}+2065x^{86}+2293x^{87}+2517x^{88}+2761x^{89}+2994x^{90}+3246x^{91}+3481x^{92}$
$+3729x^{93}+3956x^{94}+4192x^{95}+4397x^{96}+4609x^{97}+4784x^{98}+4959x^{99}+5095x^{100}$
$+5226x^{101}+5311x^{102}+5392x^{103}+5424x^{104}+5448x^{105}\ldots x^{155})$

21 FACTEURS.

$z^{21}x^{231}\ldots 1$

$z^{20}(x^{210}\ldots x^{230})\ldots z\,(x+x^{2}\ldots x^{21})$

$z^{19}(x^{190}\ldots x^{228})\ldots z^{2}(x^{3}+x^{4}\ldots 8x^{18}+9x^{19}+9x^{20}+10x^{21}+10x^{22}\ldots x^{41})$

$z^{18}(x^{171}\ldots x^{225})\ldots z^{3}(x^{6}\ldots 24x^{20}+27x^{21}+30x^{22}+33x^{23}+37x^{24}+39x^{25}+42x^{26}+44x^{27}$
$+46x^{28}+47x^{29}+49x^{30}+49x^{31}+50x^{32}+50x^{33}\ldots x^{60})$

$z^{17}(x^{153}\ldots x^{221})\ldots z^{4}(x^{10}\ldots 39x^{23}+47x^{24}+54x^{25}+64x^{26}+72x^{27}+83x^{28}+92x^{29}+104x^{30}$
$+113x^{31}+125x^{32}+134x^{33}+146x^{34}+154x^{35}+165x^{36}+172x^{37}$
$+182x^{38}+187x^{39}+195x^{40}+198x^{41}+204x^{42}+204x^{43}+207x^{44}\ldots x^{76})$

$$z^{16}(x^{136}\ldots x^{216})\ldots z^{5}(x^{15}\ldots\ 47x^{27}+57x^{28}+70x^{29}+84x^{30}+101x^{31}+118x^{32}+139x^{33}$$
$$+160x^{34}+185x^{35}+209x^{36}+237x^{37}+264x^{38}+295x^{39}+324x^{40}$$
$$+356x^{41}+386x^{42}+419x^{43}+448x^{44}+480x^{45}+507x^{46}+536x^{47}$$
$$+559x^{48}+583x^{49}+601x^{50}+619x^{51}+630x^{52}+641x^{53}+645x^{54}$$
$$+649x^{55}\ldots x^{95})$$

$$z^{15}(x^{120}\ldots x^{210})\ldots z^{6}(x^{21}\ldots\ 44x^{32}+58x^{33}+71x^{34}+90x^{35}+110x^{36}+135x^{37}+161x^{38}$$
$$+195x^{39}+228x^{40}+270x^{41}+312x^{42}+362x^{43}+412x^{44}+472x^{45}$$
$$+529x^{46}+596x^{47}+661x^{48}+734x^{49}+803x^{50}+882x^{51}+952x^{52}$$
$$+1031x^{53}+1102x^{54}+1178x^{55}+1244x^{56}+1316x^{57}+1373x^{58}$$
$$+1435x^{59}+1483x^{60}+1532x^{61}+1565x^{62}+1601x^{63}+1617x^{64}$$
$$+1635x^{65}+1636x^{66}\ldots x^{111})$$

$$z^{14}(x^{105}\ldots x^{203})\ldots z^{7}(x^{28}\ldots 38x^{38}+49x^{39}+65x^{40}+82x^{41}+105x^{42}+130x^{43}+162x^{44}$$
$$+197x^{45}+241x^{46}+288x^{47}+345x^{48}+406x^{49}+478x^{50}+554x^{51}$$
$$+643x^{52}+735x^{53}+840x^{54}+948x^{55}+1069x^{56}+1191x^{57}+1326x^{58}$$
$$+1460x^{59}+1605x^{60}+1747x^{61}+1898x^{62}+2043x^{63}+2195x^{64}$$

$$+ 2337x^{65} + 2483x^{66} + 2616x^{67} + 2750x^{68} + 2867x^{69} + 2983x^{70}$$
$$+ 3078x^{71} + 3169x^{72} + 3237x^{73} + 3299x^{74} + 3336x^{75} + 3366x^{76}$$
$$+ 3370x^{77} \ldots x^{126})$$

$$z^{13}(x^{91} \ldots x^{195}) \ldots z^{8}(x^{36} \ldots 29x^{45} + 40x^{46} + 52x^{47} + 70x^{48} + 89x^{49} + 115x^{50} + 144x^{51} + 182x^{52}$$
$$+ 223x^{53} + 276x^{54} + 333x^{55} + 404x^{56} + 480x^{57} + 572x^{58} + 670x^{59}$$
$$+ 787x^{60} + 909x^{61} + 1051x^{62} + 1199x^{63} + 1368x^{64} + 1541x^{65} + 1736x^{66}$$
$$+ 1933x^{67} + 2151x^{68} + 2368x^{69} + 2604x^{70} + 2836x^{71} + 3085x^{72}$$
$$+ 3324x^{73} + 3576x^{74} + 3814x^{75} + 4061x^{76} + 4287x^{77} + 4518x^{78}$$
$$+ 4723x^{79} + 4928x^{80} + 5101x^{81} + 5270x^{82} + 5403x^{83} + 5529x^{84}$$
$$+ 5614x^{85} + 5689x^{86} + 5722x^{87} + 5744x^{88} \ldots x^{140})$$

$$z^{12}(x^{78} \ldots x^{186}) \ldots z^{9}(x^{45} + x^{46} + 2x^{47} + 3x^{48} + 5x^{49} + 7x^{50} + 11x^{51} + 15x^{52} + 22x^{53} + 30x^{54}$$
$$+ 41x^{55} + 54x^{56} + 73x^{57} + 93x^{58} + 121x^{59} + 153x^{60} + 194x^{61} + 240x^{62}$$
$$+ 299x^{63} + 363x^{64} + 443x^{65} + 531x^{66} + 636x^{67} + 751x^{68} + 888x^{69}$$
$$+ 1033x^{70} + 1202x^{71} + 1383x^{72} + 1587x^{73} + 1802x^{74} + 2044x^{75}$$
$$+ 2293x^{76} + 2569x^{77} + 2852x^{78} + 3157x^{79} + 3466x^{80} + 3798x^{81}$$

$$+4124x^{82}+4469x^{83}+4807x^{84}+5155x^{85}+5488x^{86}+5829x^{87}$$
$$+6144x^{88}+6461x^{89}+6748x^{90}+7026x^{91}+7268x^{92}+7500x^{93}$$
$$+7684x^{94}+7853x^{95}+7975x^{96}+8074x^{97}+8122x^{98}+8150x^{99}\ldots x^{153})$$

$$z^{11}(x^{66}\ldots x^{176})\ldots z^{10}(x^{55}+x^{56}+2x^{57}+3x^{58}+5x^{59}+7x^{60}+11x^{61}+15x^{62}+22x^{63}+30x^{64}$$
$$+42x^{65}+55x^{66}+74x^{67}+94x^{68}+124x^{69}+157x^{70}+200x^{71}+248x^{72}$$
$$+310x^{73}+378x^{74}+463x^{75}+556x^{76}+669x^{77}+792x^{78}+939x^{79}$$
$$+1097x^{80}+1281x^{81}+1478x^{82}+1703x^{83}+1940x^{84}+2208x^{85}$$
$$+2486x^{86}+2795x^{87}+3113x^{88}+3460x^{89}+3812x^{90}+4191x^{91}$$
$$+4569x^{92}+4970x^{93}+5364x^{94}+5776x^{95}+6172x^{96}+6580x^{97}$$
$$+6964x^{98}+7352x^{99}+7708x^{100}+8060x^{101}+8371x^{102}+8672x^{103}$$
$$+8924x^{104}+9160x^{105}+9340x^{106}+9499x^{107}+9598x^{108}+9673x^{109}$$
$$+9686x^{110}\ldots x^{165})$$

22 FACTEURS.

$$z^{22}x^{253}\ldots 1$$
$$z^{21}(x^{231}\ldots x^{252})\ldots z\,(x+x^{2}\ldots x^{22})$$

$$z^{20}(x^{210}\dots x^{250})\dots z^{2}(x^{3}+x^{4}\dots\dots 8x^{18}+9x^{19}+9x^{20}+10x^{21}+10x^{22}+11x^{23}\dots x^{43})$$

$$z^{19}(x^{190}\dots x^{247})\dots z^{3}(x^{6}+x^{7}\dots\dots 24x^{20}+27x^{21}+30x^{22}+33x^{23}+37x^{24}+40x^{25}+43x^{26}$$
$$+46x^{27}+48x^{28}+50x^{29}+52x^{30}+53x^{31}+54x^{32}+55x^{33}$$
$$+55x^{34}\dots x^{63})$$

$$z^{18}(x^{171}\dots x^{243})\dots z^{4}(x^{10}+x^{11}\dots\dots 39x^{23}+47x^{24}+54x^{25}+64x^{26}+72x^{27}+84x^{28}+93x^{29}$$
$$+106x^{30}+116x^{31}+129x^{32}+139x^{33}+153x^{34}+162x^{35}+175x^{36}$$
$$+184x^{37}+196x^{38}+203x^{39}+214x^{40}+219x^{41}+228x^{42}+231x^{43}$$
$$+237x^{44}+237x^{45}+241x^{46}\dots x^{82})$$

$$z^{17}(x^{153}\dots x^{238})\dots z^{5}(x^{15}\dots\dots 47x^{27}+57x^{28}+70x^{29}+84x^{30}+101x^{31}+119x^{32}+140x^{33}$$
$$+162x^{34}+188x^{35}+214x^{36}+243x^{37}+273x^{38}+306x^{39}+339x^{40}$$
$$+374x^{41}+409x^{42}+446x^{43}+482x^{44}+519x^{45}+554x^{46}+590x^{47}$$
$$+623x^{48}+655x^{49}+684x^{50}+711x^{51}+734x^{52}+754x^{53}+770x^{54}$$
$$+783x^{55}+791x^{56}+795x^{57}\dots x^{100})$$

$$z^{16}(x^{136}\dots x^{232})\dots z^{6}(x^{21}\dots\dots 44x^{32}+58x^{33}+71x^{34}+90x^{35}+110x^{36}+136x^{37}+162x^{38}$$
$$+197x^{39}+231x^{40}+275x^{41}+319x^{42}+372x^{43}+425x^{44}+490x^{45}$$

$$+552x^{46}+626x^{47}+698x^{48}+781x^{49}+860x^{50}+952x^{51}+1036x^{52}$$
$$+1132x^{53}+1220x^{54}+1317x^{55}+1404x^{56}+1501x^{57}+1582x^{58}$$
$$+1672x^{59}+1747x^{60}+1827x^{61}+1889x^{62}+1957x^{63}+2003x^{64}$$
$$+2054x^{65}+2084x^{66}+2115x^{67}+2124x^{68}+2137x^{69}\ldots x^{117})$$
$$z^{15}(x^{120}\ldots x^{225})\ldots z^{7}(x^{28}\ldots 38x^{38}+49x^{39}+65x^{40}+82x^{41}+105x^{42}+131x^{43}+163x^{44}$$
$$+199x^{45}+244x^{46}+293x^{47}+352x^{48}+417x^{49}+492x^{50}+574x^{51}$$
$$+669x^{52}+770x^{53}+884x^{54}+1006x^{55}+1140x^{56}+1281x^{57}+1436x^{58}$$
$$+1595x^{59}+1766x^{60}+1942x^{61}+2126x^{62}+2313x^{63}+2507x^{64}$$
$$+2699x^{65}+2895x^{66}+3088x^{67}+3279x^{68}+3463x^{69}+3644x^{70}$$
$$+3812x^{71}+3972x^{72}+4119x^{73}+4251x^{74}+4367x^{75}+4468x^{76}$$
$$+4548x^{77}+4610x^{78}+4652x^{79}+4672x^{80}\ldots x^{135})$$
$$z^{14}(x^{105}\ldots x^{217})\ldots z^{8}(x^{36}\ldots 29x^{45}+40x^{46}+52x^{47}+70x^{48}+89x^{49}+116x^{50}+145x^{51}+184x^{52}$$
$$+226x^{53}+281x^{54}+340x^{55}+415x^{56}+495x^{57}+593x^{58}+698x^{59}$$
$$+825x^{60}+958x^{61}+1116x^{62}+1281x^{63}+1473x^{64}+1671x^{65}+1898x^{66}$$
$$+2130x^{67}+2392x^{68}+2656x^{69}+2949x^{70}+3242x^{71}+3563x^{72}$$

$$+3878x^{73}+4219x^{74}+4549x^{75}+4901x^{76}+5235x^{77}+5587x^{78}$$
$$+5914x^{79}+6254x^{80}+6561x^{81}+6875x^{82}+7150x^{83}+7427x^{84}$$
$$+7657x^{85}+7884x^{86}+8059x^{87}+8227x^{88}+8338x^{89}+8439x^{90}$$
$$+8481x^{91}+8512x^{92}\ldots x^{148})$$

$$z^{13}(x^{91}\ldots x^{208})\ldots z^{9}(x^{45}+x^{46}+2x^{47}+3x^{48}+5x^{49}+7x^{50}+11x^{51}+15x^{52}+22x^{53}+30x^{54}$$
$$+41x^{55}+54x^{56}+73x^{57}+94x^{58}+122x^{59}+155x^{60}+197x^{61}+245x^{62}$$
$$+306x^{63}+374x^{64}+458x^{65}+553x^{66}+665x^{67}+791x^{68}+940x^{69}$$
$$+1103x^{70}+1291x^{71}+1498x^{72}+1731x^{73}+1984x^{74}+2267x^{75}$$
$$+2569x^{76}+2902x^{77}+3256x^{78}+3637x^{79}+4038x^{80}+4468x^{81}$$
$$+4911x^{82}+5378x^{83}+5858x^{84}+6354x^{85}+6856x^{86}+7370x^{87}$$
$$+7880x^{88}+8394x^{89}+8899x^{90}+9394x^{91}+9872x^{92}+10336x^{93}$$
$$+10769x^{94}+11177x^{95}+11551x^{96}+11888x^{97}+12183x^{98}+12437x^{99}$$
$$+12640x^{100}+12797x^{101}+12903x^{102}+12954x^{103}\ldots x^{162})$$

$$z^{12}(x^{78}\ldots x^{196})\ldots z^{10}(x^{55}+x^{56}+2x^{57}+3x^{58}+5x^{59}+7x^{60}+11x^{61}+15x^{62}+22x^{63}+30x^{64}$$
$$+42x^{65}+55x^{66}+75x^{67}+95x^{68}+126x^{69}+160x^{70}+205x^{71}+255x^{72}$$

$$+341x^{73}+393x^{74}+485x^{75}+586x^{76}+710x^{77}+846x^{78}+1012x^{79}$$
$$+1190x^{80}+1402x^{81}+1631x^{82}+1897x^{83}+2180x^{84}+2507x^{85}$$
$$+2849x^{86}+3238x^{87}+3644x^{88}+4096x^{89}+4563x^{90}+5079x^{91}$$
$$+5602x^{92}+6172x^{93}+6747x^{94}+7363x^{95}+7974x^{96}+8624x^{97}$$
$$+9257x^{98}+9921x^{99}+10560x^{100}+11217x^{101}+11837x^{102}+12470x^{103}$$
$$+13048x^{104}+13629x^{105}+14147x^{106}+14654x^{107}+15086x^{108}$$
$$+15502x^{109}+15830x^{110}+16134x^{111}+16346x^{112}+16525x^{113}$$
$$+16608x^{114}+16660x^{115}\ldots x^{175})$$

$$z^{11}(x^{66}+x^{67}+2x^{68}+3x^{69}+5x^{70}+7x^{71}+11x^{72}+15x^{73}+22x^{74}+30x^{75}+42x^{76}+56x^{77}$$
$$+75x^{78}+96x^{79}+127x^{80}+162x^{81}+207x^{82}+259x^{83}+325x^{84}+400x^{85}+493x^{86}$$
$$+598x^{87}+724x^{88}+866x^{89}+1033x^{90}+1221x^{91}+1438x^{92}+1678x^{93}+1951x^{94}$$
$$+2250x^{95}+2586x^{96}+2949x^{97}+3351x^{98}+3782x^{99}+4252x^{100}+4751x^{101}+5288x^{102}$$
$$+5850x^{103}+6448x^{104}+7067x^{105}+7716x^{106}+8380x^{107}+9066x^{108}+9759x^{109}$$
$$+10465x^{110}+11168x^{111}+11872x^{112}+12562x^{113}+13241x^{114}+13894x^{115}+14524x^{116}$$

$$+15116x^{117}+15671x^{118}+16178x^{119}+16637x^{120}+17038x^{121}+17381x^{122}+17658x^{123}$$
$$+17870x^{124}+18012x^{125}+18084x^{126}\ldots x^{187})$$

23 FACTEURS.

$$z^{23}x^{276}\ldots 1$$

$$z^{22}(x^{253}\ldots x^{275})\ldots z\,(x+x^{2}\ldots x^{22})$$

$$z^{21}(x^{231}\ldots x^{273})\ldots z^{2}(x^{3}+x^{4}\ldots 8x^{18}+9x^{19}+9x^{20}+10x^{21}+10x^{22}+11x^{23}+11x^{24}\ldots x^{45})$$

$$z^{20}(x^{210}\ldots x^{270})\ldots z^{3}(x^{6}\ldots 24x^{20}+27x^{21}+30x^{22}+33x^{23}+37x^{24}+40x^{25}+44x^{26}+47x^{27}$$
$$+50x^{28}+52x^{29}+55x^{30}+56x^{31}+58x^{32}+59x^{33}+60x^{34}+60x^{35}$$
$$+61x^{36}\ldots x^{66})$$

$$z^{19}(x^{190}\ldots x^{266})\ldots z^{4}(x^{10}\ldots 39x^{23}+47x^{24}+54x^{25}+64x^{26}+72x^{27}+84x^{28}+94x^{29}+107x^{30}$$
$$+118x^{31}+132x^{32}+143x^{33}+158x^{34}+169x^{35}+183x^{36}+194x^{37}$$
$$+208x^{38}+217x^{39}+230x^{40}+238x^{41}+249x^{42}+255x^{43}+264x^{44}$$
$$+267x^{45}+274x^{46}+274x^{47}+277x^{48}\ldots x^{86})$$

$$z^{18}(x^{171}\ldots x^{261})\ldots z^{5}(x^{15}\ldots 47x^{27}+57x^{28}+70x^{29}+84x^{30}+101x^{31}+119x^{32}+141x^{33}$$

$$+163x^{34}+190x^{35}+217x^{36}+248x^{37}+279x^{38}+315x^{39}+350x^{40}$$
$$+389x^{41}+427x^{42}+469x^{43}+509x^{44}+553x^{45}+593x^{46}+637x^{47}$$
$$+677x^{48}+719x^{49}+756x^{50}+795x^{51}+827x^{52}+860x^{53}+886x^{54}$$
$$+912x^{55}+930x^{56}+948x^{57}+957x^{58}+966x^{59}+967x^{60}\ldots x^{105})$$
$$z^{17}(x^{153}\ldots x^{255})\ldots z^{6}(x^{21}\ldots 44x^{32}+58x^{33}+71x^{34}+90x^{35}+110x^{36}+136x^{37}+163x^{38}$$
$$+198x^{39}+233x^{40}+278x^{41}+324x^{42}+379x^{43}+435x^{44}+503x^{45}$$
$$+570x^{46}+649x^{47}+728x^{48}+818x^{49}+907x^{50}+1009x^{51}+1106x^{52}$$
$$+1216x^{53}+1321x^{54}+1436x^{55}+1544x^{56}+1663x^{57}+1770x^{58}$$
$$+1886x^{59}+1990x^{60}+2100x^{61}+2195x^{62}+2296x^{63}+2377x^{64}$$
$$+2463x^{65}+2530x^{66}+2597x^{67}+2643x^{68}+2691x^{69}+2714x^{70}$$
$$+2738x^{71}+2739x^{72}\ldots x^{123})$$
$$z^{16}(x^{136}\ldots x^{248})\ldots z^{7}(x^{28}\ldots 38x^{38}+49x^{39}+65x^{40}+82x^{41}+105x^{42}+131x^{43}+164x^{44}$$
$$+200x^{45}+246x^{46}+296x^{47}+357x^{48}+424x^{49}+503x^{50}+588x^{51}$$
$$+689x^{52}+796x^{53}+919x^{54}+1050x^{55}+1198x^{56}+1352x^{57}+1526x^{58}$$
$$+1705x^{59}+1902x^{60}+2104x^{61}+2323x^{62}+2544x^{63}+2782x^{64}$$

$$+3018x^{65}+3267x^{66}+3513x^{67}+3769x^{68}+4015x^{69}+4270x^{70}$$
$$+4510x^{71}+4753x^{72}+4979x^{73}+5203x^{74}+5403x^{75}+5600x^{76}$$
$$+5768x^{77}+5927x^{78}+6056x^{79}+6173x^{80}+6254x^{81}+6324x^{82}$$
$$+6357x^{83}+6375x^{84}\ldots x^{140})$$

$$z^{15}(x^{120}\ldots x^{240})\ldots z^{8}(x^{36}\ldots 29x^{45}+40x^{46}+52x^{47}+70x^{48}+89x^{49}+116x^{50}+146x^{51}+185x^{52}$$
$$+228x^{53}+284x^{54}+345x^{55}+422x^{56}+506x^{57}+608x^{58}+719x^{59}$$
$$+853x^{60}+996x^{61}+1165x^{62}+1346x^{63}+1555x^{64}+1776x^{65}$$
$$+2029x^{66}+2293x^{67}+2591x^{68}+2900x^{69}+3242x^{70}+3594x^{71}$$
$$+3980x^{72}+4370x^{73}+4793x^{74}+5218x^{75}+5671x^{76}+6119x^{77}$$
$$+6593x^{78}+7054x^{79}+7535x^{80}+7997x^{81}+8470x^{82}+8916x^{83}$$
$$+9369x^{84}+9783x^{85}+10197x^{86}+10566x^{87}+10926x^{88}+11233x^{89}$$
$$+11527x^{90}+11760x^{91}+11975x^{92}+12125x^{93}+12251x^{94}+12310x^{95}$$
$$+12346x^{96}\ldots x^{156})$$

$$z^{14}(x^{105}\ldots x^{224})\ldots z^{9}(x^{45}+x^{46}+2x^{47}+3x^{48}+5x^{49}+7x^{50}+11x^{51}+15x^{52}+22x^{53}+30x^{54}$$
$$+41x^{55}+54x^{56}+73x^{57}+94x^{58}+123x^{59}+156x^{60}+199x^{61}+248x^{62}$$

$$+ 311x^{63} + 381x^{64} + 469x^{65} + 568x^{66} + 687x^{67} + 820x^{68} + 980x^{69}$$
$$+ 1155x^{70} + 1361x^{71} + 1587x^{72} + 1847x^{73} + 2129x^{74} + 2451x^{75}$$
$$+ 2795x^{76} + 3183x^{77} + 3596x^{78} + 4052x^{79} + 4533x^{80} + 5061x^{81}$$
$$+ 5609x^{82} + 6203x^{83} + 6816x^{84} + 7470x^{85} + 8137x^{86} + 8843x^{87}$$
$$+ 9551x^{88} + 10292x^{89} + 11029x^{90} + 11786x^{91} + 12528x^{92} + 13285x^{93}$$
$$+ 14011x^{94} + 14740x^{95} + 15429x^{96} + 16107x^{97} + 16732x^{98} + 17338x^{99}$$
$$+ 17875x^{100} + 18384x^{101} + 18817x^{102} + 19208x^{103} + 19515x^{104}$$
$$+ 19778x^{105} + 19947x^{106} + 20067x^{107} + 20094x^{108} \ldots x^{171})$$

$$z^{13}(x^{91} \ldots x^{221}),, \ldots z^{10}(x^{55} + x^{56} + 2x^{57} + 3x^{58} + 5x^{59} + 7x^{60} + 11x^{61} + 15x^{62} + 22x^{63} + 30x^{64}$$
$$+ 42x^{65} + 55x^{66} + 75x^{67} + 96x^{68} + 127x^{69} + 162x^{70} + 208x^{71} + 260x^{72}$$
$$+ 348x^{73} + 404x^{74} + 500x^{75} + 608x^{76} + 740x^{77} + 887x^{78} + 1066x^{79}$$
$$+ 1263x^{80} + 1496x^{81} + 1753x^{82} + 2052x^{83} + 2377x^{84} + 2752x^{85}$$
$$+ 3155x^{86} + 3612x^{87} + 4102x^{88} + 4649x^{89} + 5228x^{90} + 5870x^{91}$$
$$+ 6542x^{92} + 7275x^{93} + 8038x^{94} + 8861x^{95} + 9705x^{96} + 10608x^{97}$$
$$+ 11524x^{98} + 12490x^{99} + 13462x^{100} + 14473x^{101} + 15474x^{102}$$

$$+ 16508x^{103} + 17516x^{104} + 18540x^{105} + 19525x^{106} + 20512x^{107}$$
$$+ 21440x^{108} + 22358x^{109} + 23200x^{110} + 24014x^{111} + 24740x^{112}$$
$$+ 25424x^{113} + 26002x^{114} + 26532x^{115} + 26944x^{116} + 27294x^{117}$$
$$+ 27523x^{118} + 27685x^{119} + 27718x^{120} \ldots x^{185})$$

$$z^{12}(x^{78} \ldots x^{210}) \ldots z^{11}(x^{66} + x^{67} + 2x^{68} + 3x^{69} + 5x^{70} + 7x^{71} + 11x^{72} + 15x^{73} + 22x^{74} + 30x^{75}$$
$$+ 42x^{76} + 56x^{77} + 76x^{78} + 97x^{79} + 129x^{80} + 165x^{81} + 212x^{82} + 266x^{83}$$
$$+ 336x^{84} + 415x^{85} + 515x^{86} + 628x^{87} + 766x^{88} + 921x^{89} + 1108x^{90}$$
$$+ 1316x^{91} + 1564x^{92} + 1838x^{93} + 2156x^{94} + 2505x^{95} + 2927x^{96}$$
$$+ 3342x^{97} + 3836x^{98} + 4368x^{99} + 4962x^{100} + 5597x^{101} + 6300x^{102}$$
$$+ 7040x^{103} + 7850x^{104} + 8698x^{105} + 9613x^{106} + 10560x^{107} + 11573x^{108}$$
$$+ 12608x^{109} + 13703x^{110} + 14812x^{111} + 15968x^{112} + 17125x^{113}$$
$$+ 18320x^{114} + 19496x^{115} + 20696x^{116} + 21863x^{117} + 23034x^{118}$$
$$+ 24152x^{119} + 25261x^{120} + 26295x^{121} + 27302x^{122} + 28218x^{123}$$
$$+ 29087x^{124} + 29849x^{125} + 30554x^{126} + 31132x^{127} + 31641x^{128}$$
$$+ 32017x^{129} + 32312x^{130} + 32467x^{131} + 82540x^{132} \ldots x^{198})$$

24 FACTEURS.

$z^{24}x^{300}\ldots 1$

$z^{23}(x^{276}\ldots x^{299})\ldots z\,(x+x^{2}\ldots x^{24})$

$z^{22}(x^{253}\ldots x^{297})\ldots z^{2}(x^{3}+x^{4}\ldots 8x^{18}+9x^{19}+9x^{20}+10x^{21}+10x^{22}+11x^{23}+11x^{24}$
$+12x^{25}\ldots x^{47})$

$z^{21}(x^{231}\ldots x^{294})\ldots z^{3}(x^{6}\ldots 24x^{20}+27x^{21}+30x^{22}+33x^{23}+37x^{24}+40x^{25}+44x^{26}+48x^{27}$
$+51x^{28}+54x^{29}+57x^{30}+59x^{31}+61x^{32}+63x^{33}+64x^{34}+65x^{35}$
$+66x^{36}+66x^{37}\ldots x^{69})$

$z^{20}(x^{210}\ldots x^{290})\ldots z^{4}(x^{10}\ldots 39x^{23}+47x^{24}+54x^{25}+64x^{26}+72x^{27}+84x^{28}+94x^{29}+108x^{30}$
$+119x^{31}+134x^{32}+146x^{33}+162x^{34}+174x^{35}+190x^{36}+202x^{37}$
$+218x^{38}+229x^{39}+244x^{40}+254x^{41}+268x^{42}+276x^{43}+288x^{44}$
$+294x^{45}+304x^{46}+307x^{47}+314x^{48}+314x^{49}+318x^{50}\ldots x^{90})$

$z^{19}(x^{190}\ldots x^{285})\ldots z^{5}(x^{15}\ldots 47x^{27}+57x^{28}+70x^{29}+84x^{30}+101x^{31}+119x^{32}+141x^{33}$
$+164x^{34}+191x^{35}+219x^{36}+251x^{37}+284x^{38}+321x^{39}+359x^{40}$
$+400x^{41}+442x^{42}+487x^{43}+532x^{44}+580x^{45}+627x^{46}+676x^{47}$

$$+724x^{48}+773x^{49}+820x^{50}+867x^{51}+911x^{52}+954x^{53}+993x^{54}$$
$$+1030x^{55}+1062x^{56}+1091x^{57}+1115x^{58}+1135x^{59}+1150x^{60}$$
$$+1160x^{61}+1165x^{62}\ldots x^{110})$$

$$z^{18}(x^{171}\ldots x^{279})\ldots z^{6}(x^{21}\ldots 44x^{32}+58x^{33}+71x^{34}+90x^{35}+110x^{36}+136x^{37}+163x^{38}$$
$$+199x^{39}+234x^{40}+280x^{41}+327x^{42}+384x^{43}+442x^{44}+513x^{45}$$
$$+583x^{46}+667x^{47}+751x^{48}+848x^{49}+944x^{50}+1056x^{51}+1163x^{52}$$
$$+1286x^{53}+1405x^{54}+1537x^{55}+1663x^{56}+1804x^{57}+1933x^{58}$$
$$+2076x^{59}+2207x^{60}+2348x^{61}+2474x^{62}+2611x^{63}+2727x^{64}$$
$$+2852x^{65}+2957x^{66}+3066x^{67}+3152x^{68}+3244x^{69}+3307x^{70}$$
$$+3375x^{71}+3416x^{72}+3457x^{73}+3470x^{74}+3486x^{75}\ldots x^{129})$$

$$z^{17}(x^{153}\ldots x^{272})\ldots z^{7}(x^{28}\ldots 38x^{38}+49x^{39}+65x^{40}+82x^{41}+105x^{42}+131x^{43}+164x^{44}$$
$$+201x^{45}+247x^{46}+298x^{47}+360x^{48}+429x^{49}+510x^{50}+599x^{51}$$
$$+703x^{52}+816x^{53}+945x^{54}+1085x^{55}+1242x^{56}+1410x^{57}+1597x^{58}$$
$$+1795x^{59}+2012x^{60}+2240x^{61}+2486x^{62}+2742x^{63}+3015x^{64}$$
$$+3296x^{65}+3591x^{66}+3892x^{67}+4204x^{68}+4518x^{69}+4840x^{70}$$

$$+ 5159x^{71} + 5481x^{72} + 5797x^{73} + 6110x^{74} + 6412x^{75} + 6706x^{76}$$
$$+ 6984x^{77} + 7248x^{78} + 7492x^{79} + 7717x^{80} + 7917x^{81} + 8094x^{82}$$
$$+ 8243x^{83} + 8365x^{84} + 8457x^{85} + 8519x^{86} + 8550x^{87} \ldots x^{147})$$

$$z^{16}(x^{136} \ldots x^{264}) \ldots z^{8}(x^{36} \ldots 29x^{45} + 40x^{46} + 52x^{47} + 70x^{48} + 89x^{49} + 116x^{50} + 146x^{51} + 186x^{52}$$
$$+ 229x^{53} + 286x^{54} + 348x^{55} + 427x^{56} + 513x^{57} + 619x^{58} + 734x^{59}$$
$$+ 874x^{60} + 1024x^{61} + 1203x^{62} + 1395x^{63} + 1620x^{64} + 1858x^{65}$$
$$+ 2134x^{66} + 2424x^{67} + 2755x^{68} + 3100x^{69} + 3488x^{70} + 3890x^{71}$$
$$+ 4337x^{72} + 4794x^{73} + 5296x^{74} + 5806x^{75} + 6360x^{76} + 6915x^{77}$$
$$+ 7512x^{78} + 8104x^{79} + 8733x^{80} + 9349x^{81} + 9996x^{82} + 10621x^{83}$$
$$+ 11271x^{84} + 11887x^{85} + 12520x^{86} + 13110x^{87} + 13708x^{88} + 14251x^{89}$$
$$+ 14794x^{90} + 15273x^{91} + 15744x^{92} + 16140x^{93} + 16521x^{94} + 16820x^{95}$$
$$+ 17099x^{96} + 17289x^{97} + 17454x^{98} + 17528x^{99} + 17575x^{100} \ldots x^{164})$$

$$z^{15}(x^{120} \ldots x^{255}) \ldots z^{9}(x^{45} + x^{46} + 2x^{47} + 3x^{48} + 5x^{49} + 7x^{50} + 11x^{51} + 15x^{52} + 22x^{53} + 30x^{54}$$
$$+ 41x^{55} + 54x^{56} + 73x^{57} + 94x^{58} + 123x^{59} + 157x^{60} + 200x^{61} + 250x^{62}$$
$$+ 314x^{63} + 386x^{64} + 476x^{65} + 579x^{66} + 702x^{67} + 842x^{68} + 1009x^{69}$$

$$+ 1195x^{70} + 1413x^{71} + 1657x^{72} + 1936x^{73} + 2245x^{74} + 2597x^{75}$$
$$+ 2980x^{76} + 3411x^{77} + 3880x^{78} + 4397x^{79} + 4955x^{80} + 5567x^{81}$$
$$+ 6217x^{82} + 6922x^{83} + 7669x^{84} + 8466x^{85} + 9302x^{86} + 10189x^{87}$$
$$+ 11107x^{88} + 12068x^{89} + 13058x^{90} + 14079x^{91} + 15119x^{92} + 16185x^{93}$$
$$+ 17253x^{94} + 18334x^{95} + 19409x^{96} + 20477x^{97} + 21525x^{98} + 22556x^{99}$$
$$+ 23546x^{100} + 24503x^{101} + 25410x^{102} + 26262x^{103} + 27050x^{104}$$
$$+ 27775x^{105} + 28417x^{106} + 28983x^{107} + 29463x^{108} + 29850x^{109}$$
$$+ 30144x^{110} + 30344x^{111} + 30441x^{112} \ldots x^{180})$$

$$z^{14}(x^{105} \ldots x^{245}) \ldots z^{10}(x^{55} + x^{56} + 2x^{57} + 3x^{58} + 5x^{59} + 7x^{60} + 11x^{61} + 15x^{62} + 22x^{63} + 30x^{64}$$
$$+ 42x^{65} + 55x^{66} + 75x^{67} + 96x^{68} + 128x^{69} + 163x^{70} + 210x^{71} + 263x^{72}$$
$$+ 353x^{73} + 411x^{74} + 511x^{75} + 623x^{76} + 762x^{77} + 917x^{78} + 1107x^{79}$$
$$+ 1317x^{80} + 1569x^{81} + 1847x^{82} + 2175x^{83} + 2533x^{84} + 2951x^{85}$$
$$+ 3403x^{86} + 3923x^{87} + 4483x^{88} + 5118x^{89} + 5796x^{90} + 6557x^{91}$$
$$+ 7362x^{92} + 8255x^{93} + 9193x^{94} + 10222x^{95} + 11292x^{96} + 12455x^{97}$$
$$+ 13653x^{98} + 14941x^{99} + 16257x^{100} + 17656x^{101} + 19070x^{102}$$

$$+ 20560x^{103} + 22049x^{104} + 23601x^{105} + 25134x^{106} + 26715x^{107}$$
$$+ 28256x^{108} + 29828x^{109} + 31337x^{110} + 32857x^{111} + 34291x^{112}$$
$$+ 35716x^{113} + 37031x^{114} + 38318x^{115} + 39472x^{116} + 40579x^{117}$$
$$+ 41534x^{118} + 42425x^{119} + 43147x^{120} + 43792x^{121} + 44255x^{122}$$
$$+ 44632x^{123} + 44819x^{124} + 44916x^{125} \ldots x^{195})$$
$$z^{13}(x^{91} \ldots x^{234}) \ldots z^{11}(x^{66} + x^{67} + 2x^{68} + 3x^{69} + 5x^{70} + 7x^{71} + 11x^{72} + 15x^{73} + 22x^{74} + 30x^{75}$$
$$+ 42x^{76} + 56x^{77} + 76x^{78} + 98x^{79} + 130x^{80} + 167x^{81} + 215x^{82} + 271x^{83}$$
$$+ 343x^{84} + 426x^{85} + 530x^{86} + 650x^{87} + 796x^{88} + 963x^{89} + 1163x^{90}$$
$$+ 1391x^{91} + 1660x^{92} + 1965x^{93} + 2318x^{94} + 2713x^{95} + 3187x^{96}$$
$$+ 3690x^{97} + 4240x^{98} + 4868x^{99} + 5570x^{100} + 6337x^{101} + 7187x^{102}$$
$$+ 8106x^{103} + 9113x^{104} + 10194x^{105} + 11366x^{106} + 12612x^{107} + 13950x^{108}$$
$$+ 15360x^{109} + 16858x^{110} + 18424x^{111} + 20070x^{112} + 21774x^{113}$$
$$+ 23548x^{114} + 25366x^{115} + 27238x^{116} + 29138x^{117} + 31072x^{118}$$
$$+ 33013x^{119} + 34966x^{120} + 36903x^{121} + 38826x^{122} + 40708x^{123}$$
$$+ 42549x^{124} + 44322x^{125} + 46028x^{126} + 47640x^{127} + 49157x^{128}$$

$$+ 50557x^{129} + 51837x^{130} + 52979x^{131} + 53980x^{132} + 54825x^{133}$$
$$+ 55512x^{134} + 56031x^{135} + 56381x^{136} + 56556x^{137} \ldots x^{209})$$
$$z^{12}(x^{78} + x^{79} + 2x^{80} + 3x^{81} + 5x^{82} + 7x^{83} + 11x^{84} + 15x^{85} + 22x^{86} + 30x^{87} + 42x^{88} + 56x^{89}$$
$$+ 77x^{90} + 98x^{91} + 131x^{92} + 168x^{93} + 217x^{94} + 273x^{95} + 347x^{96} + 430x^{97} + 537x^{98}$$
$$+ 658x^{99} + 808x^{100} + 977x^{101} + 1184x^{102} + 1413x^{103} + 1693x^{104} + 2003x^{105} + 2368x^{106}$$
$$+ 2771x^{107} + 3263x^{108} + 3757x^{109} + 4351x^{110} + 4996x^{111} + 5728x^{112} + 6518x^{113} + 7408x^{114}$$
$$+ 8356x^{115} + 9414x^{116} + 10536x^{117} + 11769x^{118} + 13065x^{119} + 14500x^{120} + 15950x^{121}$$
$$+ 17539x^{122} + 19180x^{123} + 20930x^{124} + 22722x^{125} + 24620x^{126} + 26536x^{127} + 28546x^{128}$$
$$+ 30561x^{129} + 32647x^{130} + 34712x^{131} + 36834x^{132} + 38903x^{133} + 41005x^{134} + 43030x^{135}$$
$$+ 45055x^{136} + 46974x^{137} + 48874x^{138} + 50628x^{139} + 52337x^{140} + 53880x^{141} + 55346x^{142}$$
$$+ 56619x^{143} + 57801x^{144} + 58762x^{145} + 59614x^{146} + 60235x^{147} + 60728x^{148} + 60981x^{149}$$
$$+ 61108x^{150} \ldots x^{222})$$

25 FACTEURS.

$$z^{25}x^{325} \ldots 1$$
$$z^{24}(x^{300} \ldots x^{324}) \ldots z\,(x + x^{2} + x^{3} \ldots x^{25})$$

$$z^{23}(x^{276}\ldots x^{322})\ldots z^{2}(x^{3}+x^{4}+2x^{5}+2x^{6}+3x^{7}+3x^{8}+4x^{9}+4x^{10}+5x^{11}+5x^{12}+6x^{13}+6x^{14}$$
$$+7x^{15}+7x^{16}+8x^{17}+8x^{18}+9x^{19}+9x^{20}+10x^{21}+10x^{22}+11x^{23}$$
$$+11x^{24}+12x^{25}+12x^{26}\ldots x^{49})$$

$$z^{22}(x^{253}\ldots x^{319})\ldots z^{3}(x^{6}+x^{7}+2x^{8}+3x^{9}+4x^{10}+5x^{11}+7x^{12}+8x^{13}+10x^{14}+12x^{15}+14x^{16}$$
$$+16x^{17}+19x^{18}+21x^{19}+24x^{20}+27x^{21}+30x^{22}+33x^{23}+37x^{24}$$
$$+40x^{25}+44x^{26}+48x^{27}+52x^{28}+55x^{29}+59x^{30}+61x^{31}+64x^{32}$$
$$+66x^{33}+68x^{34}+69x^{35}+71x^{36}+71x^{37}+72x^{38}+72x^{39}\ldots x^{72})$$

$$z^{21}(x^{231}\ldots x^{315})\ldots z^{4}(x^{10}+x^{11}+2x^{12}+3x^{13}+5x^{14}+6x^{15}+9x^{16}+11x^{17}+15x^{18}+18x^{19}$$
$$+23x^{20}+27x^{21}+34x^{22}+39x^{23}+47x^{24}+54x^{25}+64x^{26}+72x^{27}$$
$$+84x^{28}+94x^{29}+108x^{30}+120x^{31}+135x^{32}+148x^{33}+165x^{34}$$
$$+178x^{35}+195x^{36}+209x^{37}+226x^{38}+239x^{39}+256x^{40}+268x^{41}$$
$$+284x^{42}+295x^{43}+309x^{44}+318x^{45}+331x^{46}+337x^{47}+347x^{48}$$
$$+351x^{49}+358x^{50}+358x^{51}+362x^{52}\ldots x^{94})$$

$$z^{20}(x^{210}\ldots x^{310})\ldots z^{5}(x^{15}+x^{16}+2x^{17}+3x^{18}+5x^{19}+7x^{20}+10x^{21}+13x^{22}+18x^{23}+23x^{24}$$
$$+30x^{25}+37x^{26}+47x^{27}+57x^{28}+70x^{29}+84x^{30}+101x^{31}+119x^{32}$$

$$+ 141x^{33} + 164x^{34} + 192x^{35} + 220x^{36} + 253x^{37} + 287x^{38} + 326x^{39}$$
$$+ 365x^{40} + 409x^{41} + 453x^{42} + 502x^{43} + 550x^{44} + 603x^{45} + 654x^{46}$$
$$+ 710x^{47} + 763x^{48} + 820x^{49} + 874x^{50} + 931x^{51} + 983x^{52} + 1038x^{53}$$
$$+ 1087x^{54} + 1138x^{55} + 1181x^{56} + 1225x^{57} + 1261x^{58} + 1297x^{59}$$
$$+ 1324x^{60} + 1350x^{61} + 1367x^{62} + 1383x^{63} + 1389x^{64} + 1394x^{65} \ldots x^{115})$$
$$z^{19}(x^{190} \ldots x^{304}) \ldots z^{6}(x^{21} + x^{22} + 2x^{23} + 3x^{24} + 5x^{25} + 7x^{26} + 11x^{27} + 14x^{28} + 20x^{29} + 26x^{30}$$
$$+ 35x^{31} + 44x^{32} + 58x^{33} + 71x^{34} + 90x^{35} + 110x^{36} + 136x^{37} + 163x^{38}$$
$$+ 199x^{39} + 235x^{40} + 281x^{41} + 329x^{42} + 387x^{43} + 447x^{44} + 520x^{45}$$
$$+ 593x^{46} + 680x^{47} + 769x^{48} + 871x^{49} + 974x^{50} + 1093x^{51} + 1210x^{52}$$
$$+ 1343x^{53} + 1475x^{54} + 1621x^{55} + 1764x^{56} + 1923x^{57} + 2074x^{58}$$
$$+ 2240x^{59} + 2398x^{60} + 2567x^{61} + 2725x^{62} + 2895x^{63} + 3048x^{64}$$
$$+ 3211x^{65} + 3357x^{66} + 3508x^{67} + 3639x^{68} + 3776x^{69} + 3887x^{70}$$
$$+ 4002x^{71} + 4092x^{72} + 4181x^{73} + 4243x^{74} + 4286x^{75} + 4337x^{76}$$
$$+ 4368x^{77} + 4370x^{78} \ldots x^{135})$$
$$z^{18}(x^{171} \ldots x^{297}) \ldots z^{7}(x^{28} + x^{29} + 2x^{30} + 3x^{31} + 5x^{32} + 7x^{33} + 11x^{34} + 15x^{35} + 21x^{36} + 28x^{37}$$

$$+38x^{38}+49x^{39}+65x^{40}+82x^{41}+105x^{42}+131x^{43}+164x^{44}+201x^{45}$$
$$+248x^{46}+299x^{47}+362x^{48}+432x^{49}+515x^{50}+606x^{51}+714x^{52}$$
$$+830x^{53}+965x^{54}+1111x^{55}+1277x^{56}+1454x^{57}+1655x^{58}+1866x^{59}$$
$$+2102x^{60}+2350x^{61}+2622x^{62}+2905x^{63}+3214x^{64}+3530x^{65}$$
$$+3871x^{66}+4219x^{67}+4588x^{68}+4960x^{69}+5353x^{70}+5742x^{71}$$
$$+6148x^{72}+6548x^{73}+6958x^{74}+7356x^{75}+7762x^{76}+8147x^{77}$$
$$+8534x^{78}+8897x^{79}+9254x^{80}+9580x^{81}+9898x^{82}+10176x^{83}$$
$$+10441x^{84}+10664x^{85}+10867x^{86}+11024x^{87}+11161x^{88}+11246x^{89}$$
$$+11309x^{90}+11322x^{91}\ldots x^{154})$$
$$z^{47}(x^{153}\ldots x^{289})\ldots z^{3}(x^{36}+x^{37}+2x^{38}+3x^{39}+5x^{40}+7x^{41}+11x^{42}+15x^{43}+22x^{44}+29x^{45}$$
$$+40x^{46}+52x^{47}+70x^{48}+89x^{49}+116x^{50}+146x^{51}+186x^{52}+230x^{53}$$
$$+287x^{54}+350x^{55}+430x^{56}+518x^{57}+626x^{58}+745x^{59}+889x^{60}$$
$$+1045x^{61}+1231x^{62}+1433x^{63}+1669x^{64}+1923x^{65}+2216x^{66}$$
$$+2529x^{67}+2886x^{68}+3264x^{69}+3689x^{70}+4137x^{71}+4635x^{72}$$
$$+5154x^{73}+5725x^{74}+6316x^{75}+6959x^{76}+7618x^{77}+8328x^{78}$$

$$+9049x^{79}+9818x^{80}+10591x^{81}+11406x^{82}+12218x^{83}+13066x^{84}$$
$$+13899x^{85}+14760x^{86}+15596x^{87}+16450x^{88}+17266x^{89}+18090x^{90}$$
$$+18864x^{91}+19636x^{92}+20344x^{93}+21039x^{94}+21660x^{95}+22258x^{96}$$
$$+22770x^{97}+23251x^{98}+23638x^{99}+23987x^{100}+24234x^{101}$$
$$+24438x^{102}+24537x^{103}+24591x^{104}\ldots x^{172})$$

$$z^{16}(x^{136}\ldots x^{280})\ldots z^{9}(x^{45}+x^{46}+2x^{47}+3x^{48}+5x^{49}+7x^{50}+11x^{51}+15x^{52}+22x^{53}+30x^{54}$$
$$+41x^{55}+54x^{56}+73x^{57}+94x^{58}+123x^{59}+157x^{60}+201x^{61}+251x^{62}$$
$$+316x^{63}+389x^{64}+481x^{65}+586x^{66}+713x^{67}+857x^{68}+1031x^{69}$$
$$+1224x^{70}+1453x^{71}+1709x^{72}+2006x^{73}+2334x^{74}+2713x^{75}$$
$$+3126x^{76}+3596x^{77}+4109x^{78}+4683x^{79}+5303x^{80}+5994x^{81}$$
$$+6730x^{82}+7541x^{83}+8403x^{84}+9340x^{85}+10326x^{86}+11392x^{87}$$
$$+12502x^{88}+13688x^{89}+14916x^{90}+16213x^{91}+17543x^{92}+18940x^{93}$$
$$+20353x^{94}+21822x^{95}+23299x^{96}+24814x^{97}+26319x^{98}+27852x^{99}$$
$$+29352x^{100}+30863x^{101}+32325x^{102}+33774x^{103}+35154x^{104}$$
$$+36508x^{105}+37766x^{106}+38979x^{107}+40084x^{108}+41121x^{109}$$

$$+ 42031x^{110} + 42864x^{111} + 43551x^{112} + 44149x^{113} + 44595x^{114}$$
$$+ 44938x^{115} + 45123x^{116} + 45207x^{117} \ldots\ldots x^{180}$$

$$z^{15}(x^{120} \ldots x^{270}) \ldots z^{10}(x^{55} + x^{56} + 2x^{57} + 3x^{58} + 5x^{59} + 7x^{60} + 11x^{61} + 15x^{62} + 22x^{63} + 30x^{64}$$
$$+ 42x^{65} + 55x^{66} + 75x^{67} + 96x^{68} + 128x^{69} + 164x^{70} + 211x^{71} + 265x^{72}$$
$$+ 356x^{73} + 416x^{74} + 518x^{75} + 634x^{76} + 777x^{77} + 939x^{78} + 1137x^{79}$$
$$+ 1358x^{80} + 1623x^{81} + 1920x^{82} + 2269x^{83} + 2656x^{84} + 3108x^{85}$$
$$+ 3603x^{86} + 4173x^{87} + 4797x^{88} + 5504x^{89} + 6272x^{90} + 7136x^{91}$$
$$+ 8064x^{92} + 9097x^{93} + 10202x^{94} + 11417x^{95} + 12705x^{96} + 14112x^{97}$$
$$+ 15589x^{98} + 17186x^{99} + 18854x^{100} + 20636x^{101} + 22481x^{102}$$
$$+ 24440x^{103} + 26446x^{104} + 28556x^{105} + 30701x^{106} + 32932x^{107}$$
$$+ 35178x^{108} + 37497x^{109} + 39803x^{110} + 42159x^{111} + 44480x^{112}$$
$$+ 46823x^{113} + 49099x^{114} + 51376x^{115} + 53551x^{116} + 55698x^{117}$$
$$+ 57719x^{118} + 59678x^{119} + 61481x^{120} + 63201x^{121} + 64732x^{122}$$
$$+ 66157x^{123} + 67375x^{124} + 68462x^{125} + 69322x^{126} + 70042x^{127}$$
$$+ 70517x^{128} + 70842x^{129} + 70922x^{130} \ldots\ldots x^{205}$$

$$z^{14}(x^{105}\ldots x^{239})\ldots z^{11}(x^{66}+x^{67}+2x^{68}+3x^{69}+5x^{70}+7x^{71}+11x^{72}+15x^{73}+22x^{74}+30x^{75}$$
$$+42x^{76}+56x^{77}+76x^{78}+98x^{79}+131x^{80}+168x^{81}+217x^{82}+274x^{83}$$
$$+348x^{84}+433x^{85}+541x^{86}+665x^{87}+818x^{88}+993x^{89}+1205x^{90}$$
$$+1446x^{91}+1735x^{92}+2061x^{93}+2446x^{94}+2876x^{95}+3397x^{96}$$
$$+3953x^{97}+4593x^{98}+5279x^{99}+6081x^{100}+6960x^{101}+7949x^{102}$$
$$+9023x^{103}+10220x^{104}+11511x^{105}+12935x^{106}+14459x^{107}$$
$$+16125x^{108}+17893x^{109}+19809x^{110}+21827x^{111}+23993x^{112}$$
$$+26257x^{113}+28666x^{114}+31162x^{115}+33795x^{116}+36500x^{117}$$
$$+39327x^{118}+42206x^{119}+45188x^{120}+48195x^{121}+51281x^{122}$$
$$+54361x^{123}+57490x^{124}+60579x^{125}+63684x^{126}+66710x^{127}$$
$$+69717x^{128}+72606x^{129}+75438x^{130}+78113x^{131}+80695x^{132}$$
$$+83081x^{133}+85340x^{134}+87368x^{135}+89238x^{136}+90847x^{137}$$
$$+92272x^{138}+93412x^{139}+94349x^{140}+94984x^{141}+95404x^{142}$$
$$+95514x^{143}\ldots x^{220}$$

$$z^{13}(x^{91}\ldots x^{247})\ldots z^{12}(x^{78}+x^{79}+2x^{80}+3x^{81}+5x^{82}+7x^{83}+11x^{84}+15x^{85}+22x^{86}+30x^{87}$$
$$+42x^{88}+56x^{89}+77x^{90}+99x^{91}+132x^{92}+170x^{93}+220x^{94}+278x^{95}$$
$$+354\ {}^{9}+441x^{97}+552x^{98}+680x^{99}+838x^{100}+1019x^{101}+1240x^{102}$$
$$+1489x^{103}+1791x^{104}+2133x^{105}+2535x^{106}+2986x^{107}+3534x^{108}$$
$$+4100x^{109}+4777x^{110}+5526x^{111}+6378x^{112}+7314x^{113}+8371x^{114}$$
$$+9519x^{115}+10805x^{116}+12196x^{117}+13734x^{118}+15383x^{119}$$
$$+17213x^{120}+19137x^{121}+21229x^{122}+23420x^{123}+25798x^{124}$$
$$+28292x^{125}+30957x^{126}+33723x^{127}+36652x^{128}+39674x^{129}$$
$$+42841x^{130}+46078x^{131}+49446x^{132}+52853x^{133}+56365x^{134}$$
$$+59888x^{135}+63479x^{136}+67044x^{137}+70648x^{138}+74176x^{139}$$
$$+77703x^{140}+81118x^{141}+84484x^{142}+87691x^{143}+90814x^{144}$$
$$+93728x^{145}+96517x^{146}+99061x^{147}+101436x^{148}+103530x^{149}$$
$$+105430x^{150}+107009x^{151}+108368x^{152}+109392x^{153}+110171x^{154}$$
$$+110599x^{155}+110780x^{156}\ldots x^{234})$$

On ne poussera pas plus loin le développement des facteurs, et l'on va présenter encore quelques observations pour faciliter les opérations que l'on voudrait continuer.

1.° Pour procéder par ordre, on met en tête la plus haute puissance de z, qui est toujours égale au nombre des facteurs que l'on considère, et l'unité, qui reste dans tous les développemens. Cette plus haute puissance de z est multipliée par x élevé à une puissance égale à la somme de tous les termes de la progression de 1 au nombre de facteurs que l'on emploie. Ce premier produit trouvé, on peut, sans recourir aux formules, avoir immédiatement les plus petits et les plus grands exposans de x pour toutes les puissances de z, qui vont toujours en diminuant d'une unité. Ainsi, par exemple, soient cherchés les exposans de x pour 25 facteurs : on aura d'abord $z^{25} x^{325}$, et $325 = (25+1)\frac{25}{2} = \frac{26 \cdot 25}{2} = 13 \cdot 25 =$ somme des 25 premiers nombres. Pour z^{24}, le plus petit exposant de x est le précédent diminué du nombre de facteurs, ou de 25 : il sera donc 300; le plus grand exposant sera 325 diminué d'une unité, ou 324. Pour z^{23}, le plus petit exposant de x sera le précédent diminué de $F-1$, ou $300-24=276$; le plus grand est le plus grand précédent diminué de deux unités, ou 322. Pour z^{22}, le plus petit coefficient de x est le précédent diminué de $F-2$, ou $276-23=253$; le plus grand sera encore celui qui précède diminué de trois unités, ou $322-3=319$. Il est bon de remarquer que les plus petits exposans de x sont les mêmes pour tout développement, et pour la même puissance de z : ainsi point de difficulté. Les plus grands s'obtiennent en diminuant toujours une unité de plus du précédent qu'on ne l'a fait pour ob-

tenir celui-ci. D'après cela, puisque les petits exposans de x pour 24 facteurs étaient 300 pour z^{24}, 276 pour z^{23}, 253 pour z^{22}, etc., ils seront encore les mêmes pour les mêmes puissances de z, dans le développement de 25 facteurs. On évite par ce moyen la soustraction. Quant aux plus grands exposans, comme on soustrait successivement 1, 2, 3, 4, etc., unités, il n'y a point de difficulté.

2.° On obtient aussi facilement les exposans de x pour les petites puissances de z correspondantes aux plus grandes, dont on vient de s'occuper. D'abord ces petites puissances sont les complémens à F des grandes : ainsi pour $F=25$, à z^{16} correspond z^9, puisque $16+9=25$, et ainsi des autres. Les petits exposans de x sont toujours égaux à la somme d'autant de termes de la progression 1·2·3·4, etc., qu'il y a d'unités dans l'exposant de z : ainsi pour z^9, par exemple, le plus petit exposant de $x =$ la somme des 9 premiers nombres $=\frac{10 \cdot 9}{2}=45$; et de même, dans tous les cas. Les plus grands exposans s'obtiennent en prenant la différence du nombre constant, qui est toujours la somme des termes de la progression des nombres jusqu'à F, au plus petit exposant de x, qui multiplie la grande valeur de z correspondante : ainsi, pour z^9, le plus grand exposant de $x=325-136=189$; 325 est fixe pour 25 facteurs; 136 est le petit exposant de x dans le terme z^{16}, correspondant à z^9.

3.° Voici de quelle manière on obtient les coefficiens successifs. Prenons un exemple. Qu'on cherche les coefficiens de x pour z^9 et 25 facteurs. Le calcul étant fait pour 24, on prendra les premiers coefficiens des puissances de x pour z^9 et 24 facteurs. On voit que le plus petit expo-

sant de x pour z^8 est 36. On ajoutera 25, qui est le nouveau facteur, à 36 : il vient 61. On ne prendra donc les premiers coefficiens que jusqu'à l'exposant 60. Ils seront donc 1, 1, 2, 3, 5, 7, 11, 15, 22, 30, 41, 54, 73, 94, 123, 157, et par conséquent communs à z^9, considéré dans le produit de 25 facteurs, ou de 24 seulement. Mais les exposans s'ajoutent, donc si l'on multiplie z^8 du produit de 24 facteurs par zx^{25}, on aura z^9x^{61}, et par suite z^9x^{62}, etc., avec les coefficiens de z^8 : ainsi il suffit d'ajouter les coefficiens des puissances de x pris dans z^8, avec ceux de x pris dans z^9, mais seulement à compter du terme qui aurait 61 pour exposant de x. On écrira en conséquence :

200 250 314 386 476 579 702 842 1009... 30441, coefficiens de x pour z^9 } pris dans le produit
1 1 2 3 5 7 11 15 22... 13110, coefficiens de x pour z^8 } de 24 facteurs.

201 251 316 389 481 586 713 857 1031... 43551, coefficiens de x pour z^9 et pour 25 facteurs.

Le dernier coefficient 43551 est celui de x^{112}; mais l'exposant le plus élevé de x pour z^9 et 25 facteurs étant, d'après la formule $\left(F-\frac{(m-1)}{2}\right)m$, $(25-4)\,9=21\cdot9=189$, et le plus petit étant 45, on aura $189-45=144$; $\frac{144}{2}=72$, lesquels ajoutés à 45, donnent 117 pour l'exposant de x dans le terme auquel on bornera les calculs. Il y a donc à ajouter encore 5 coefficiens; il n'y a point de difficulté pour ceux des puissances de x pris pour z^8 : ce sont les cinq qui suivent 13110, et qui sont 13708, 14251, 14794, 15273, 15744; quant à ceux de z^9, il faut

savoir si le dernier 30441 est moyen ou milieu pour 24 facteurs; or toutes les fois que le nombre des facteurs est pair, l'exposant impair de z donne un terme du milieu qui n'est pas moyen : ce terme du milieu doit donc être répété, et l'on aura dans le cas particulier 30441 pour le coefficient de x^{113} comme pour x^{112}; on écrira en conséquence :

30441 30344 30144 29850 29463, en remontant.

13708 14251 14794 15273 15744, coefficiens de x pour z^8.

44149 44595 44938 45123 45207, coefficiens des 5 derniers termes.

L'opération pour obtenir les coefficiens des puissances de x est terminée; quant à ce qui regarde z^9, on agira de même dans tous les cas.

Le moyen ci-dessus abrége encore beaucoup les calculs, qui se réduisent à de simples additions. C'est au reste la recherche des coefficiens qui constitue le véritable but de la formule d'Euler.

Lorsque l'exposant de z est seul, c'est-à-dire lorsque le nombre des facteurs est pair, et que cet exposant est la moitié du nombre de facteurs comme pour 24 facteurs et pour z^{12}, on obtient les coefficiens des puissances de x en ajoutant ceux de z^{11} pour 23 facteurs à eux-mêmes; en commençant les additions d'après la règle : ainsi, comme le plus petit exposant de x pour 24 facteurs et z^{12} est ^{78}, et que 66, plus petit exposant de x pour z^{11}, et 24, nouveau facteur, donnent pour somme 90, il suit qu'il y aura à ajouter les coefficiens à partir de l'exposant 90 de x : on écrira donc les coefficiens communs 1, 1, 2, 3, 5, 7, 11, 15, 22, 30, 42, 56, qui sont ceux de z^{11} ou de z^{12} pour 23 facteurs; le dernier

56 est celui de x^{89} pour z^{12} et 24 facteurs; les suivans s'obtiennent par additions, comme suit :

76 97 129 165 212, etc. } coefficiens des puissances de x
1 1 2 3 5, etc. } pour z^{11} ou z^{12}, et 23 facteurs.

77 98 131 168 217, etc., coefficiens des puissances de x pour z^{12} et 24 facteurs.

C'est la conséquence des exposans 11 et 12 de z, complémens l'un de l'autre pour 23 facteurs, et ayant les mêmes coefficiens des puissances de x.

4.° On s'est servi du mot exposant de x; cette expression est pour abréger : car x n'a réellement point de puissance; les exposans dont il est affecté indiquent seulement les résultats des combinaisons des facteurs, 1 à 1, 2 à 2, 3 à 3, etc., suivant le nombre de ces facteurs et l'exposant de z : ainsi pour 4 facteurs et z^2, on aura 1, 2, 3, 4, combinés 2 à 2, ce qui donne $1+2=3 \ldots 1+3=4 \ldots 1+4=5 \ldots 2+3=5 \ldots 2+4=6 \ldots 3+4=7$: ainsi, puisque 5 est répété, on a x^3, x^4, $2x^5$, x^6, x^7, pour puissances de x, 4 facteurs et z^2.

Supposons encore 12 facteurs et z^7 : ici le complément de z^7 est z^5; ainsi il faut combiner 5 à 5 les 12 premiers nombres; mais il suffira de s'arrêter aux combinaisons qui donneront 32, puisque les suivantes auraient les mêmes coefficiens, et l'on trouvera ceux qui ont été calculés par un moyen plus court. On conçoit aisément qu'il serait impraticable de rechercher les combinaisons, et par suite les coefficiens, par la méthode que l'on vient d'indiquer, si z avait un exposant un peu élevé, et si le nombre des facteurs était grand : ainsi pour z^{10} et 24 facteurs le dernier coefficient 44916 serait difficile à obtenir. Le seul

avantage que l'on pourrait avoir serait de ne pas être obligé de calculer le produit des 23 premiers facteurs.

5.° On peut, au moyen du développement des 25 premiers facteurs, obtenir le coefficient de x pour un exposant de z jusqu'à 50, et pour 50 facteurs. Soit proposé, par exemple, de trouver de combien de manières on peut faire 111 avec six termes de la progression de 1 à 36 : le coefficient cherché représente les combinaisons d'une des lignes du carré de 6.

Puisque $25+11=36$, il faut faire, avec la série des 11 premiers facteurs, la nouvelle série dont on a besoin, et qui sera $1+z(x^{26}+x^{27}\ldots x^{36})+z^2(x^{53}+x^{54}+2x^{55}+2x^{56}$
$+3x^{57}+3x^{58}+4x^{59}+4x^{60}+5x^{61}+5x^{62}+5x^{63}+4x^{64}$
$+4x^{65}+3x^{66}+3x^{67}+2x^{68}+2x^{69}+x^{70}+x^{71})$
$+z^3(x^{81}+x^{82}+2x^{83}+3x^{84}+4x^{85}+5x^{86}+7x^{87}+8x^{88}$
$+10x^{89}+11x^{90}+12x^{91}+12x^{92}+13x^{93}+12x^{94}+12x^{95}$
$+11x^{96}+10x^{97}+8x^{98}+7x^{99}+5x^{100}+4x^{101}+3x^{102}$
$+2x^{103}+x^{104}+x^{105})$
$+z^4(x^{110}+x^{111}\ldots)$

Il est inutile d'aller plus loin, puisque le coefficient de x excèderait 111 : il faut multiplier les puissances de z ci-dessus par celles de z pour 25 facteurs, de manière à avoir z^6 et les exposans de x de manière à obtenir x^{111}. Voici le résultat de l'opération :

1 multiplié par z^6x^{111} donne le coefficient 520 : car, la somme des plus grand et plus petit exposans de x dans z^6 étant $135+21=156$, si l'on soustrait 111, il reste 45, dont le coefficient est 520, le même que celui de 111.

z multiplié par z^5 donne $603+654+710+763+820$ $+874+931+983+1038+1087+1138$: somme, 9601.

z^3 multiplié par z^4 donne 256 + 268 + 568 + 590 + 927 + 954 + 1324 + 1348 + 1735 + 1755 + 1790 + 1432 1448 + 1074 + 1074 + 702 + 694 + 337 + 331, dont la somme est 18607.

z^8 multiplié par z^8 donne 1 + 1 + 4 + 9 + 25 + 49 + 64 + 100 + 132 + 168 + 192 + 247 + 252 + 288 + 297 + 300 + 264 259 + 200 + 176 + 144 + 104 + 55 + 59, dont la somme est 3406.

On ne peut aller plus loin; la somme totale est 32134: ainsi on peut faire 111 avec 6 termes de la progression de 1 à 36, de 32134 manières différentes.

Si l'on multiplie le produit des 25 premiers facteurs par la nouvelle série complète de 25 facteurs, les coefficiens sont les mêmes, et l'on aura le produit de 50 facteurs, au moyen duquel on résoudra les questions analogues à la précédente, pour un exposant de z qui peut aller jusqu'à 100, et ainsi de suite.

On terminera ici ce que l'on voulait dire sur la formule développée d'Euler; mais il s'agit moins de connaître le nombre de manières dont on peut faire une somme fixe avec tant de termes qu'on voudra d'une série bornée à tel nombre qu'on jugera convenable, que de déterminer parmi les combinaisons celles et seulement celles qui peuvent convenir à un carré magique, et ce problème est bien autrement difficile à résoudre; de plus, les tâtonnemens qu'entraînerait la disposition des nombres dans chaque ligne rendraient illusoire la confection des carrés magiques par cette voie : il a donc fallu rechercher les formes dont sont capables ces carrés, et les construire par le moyen de ces formes mêmes, ce qui est l'objet de ce traité.

§ 10.

APPLICATION DES CARRÉS MAGIQUES.

On se contentera de deux applications, le but de ce traité étant de faire connaître toutes les formes dont un carré est susceptible, plutôt que d'en tirer des conséquences sur lesquelles les mathématiciens pourront s'exercer, et qui doivent attirer leur attention.

On propose ce problème :

Former avec les seize cartes majeures d'un jeu un carré tel que chaque ligne contienne une quatrième majeure, et de plus, que chacune de ces quatrièmes majeures soit composée des quatre couleurs. Ce qui doit donner dix quatrièmes majeures, y compris les deux diagonales.

Il est clair d'abord que l'on ne peut se servir de tableaux où les lignes comprendraient des nombres répétés, puisqu'on aurait, ou des cartes de même nature, ou des couleurs semblables. Or il n'y a que deux manières de faire le carré de 4 sans répétition de nombres dans une même ligne, savoir :

1	2	3	4	1	2	3	4		A	B	C	D
4	3	2	1	3	4	1	2		C	D	A	B
2	1	4	3	4	3	2	1	ou	D	C	B	A
3	4	1	2	2	1	4	3		B	A	D	C

Si l'une des formes comprend les quatre espèces de cartes, et que l'autre contienne les quatre couleurs, on pourra agir comme suit :

Soient 1 les as, 2 les rois, 3 les dames, et 4 les valets.

Que les couleurs soient représentées : cœur par A, carreau par B, pique par C, et trèfle par D; en ajoutant par ordre les deux tableaux, on aura :

1 A	2 B	3 C	4 D
4 C	3 D	2 A	1 B
2 D	1 C	4 B	3 A
3 B	4 A	1 D	2 C

Substituant, il viendra :

As, cœur.	Roi, carreau.	Dame, pique.	Valet, trèfle.
Valet, pique.	Dame, trèfle.	Roi, cœur.	As, carreau.
Roi, trèfle.	As, pique.	Valet, carreau.	Dame, cœur.
Dame, carreau.	Valet, cœur.	As, trèfle.	Roi, pique.

On voit qu'en horizontale, verticale et diagonale, chaque quatrième majeure contient les quatre couleurs.

Quant aux combinaisons, le 1.er tableau peut avoir $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ arrangemens.

Le 2.e tableau aurait également 24 arrangemens : ce qui donnera 24^2. Il devient superflu de prendre les nombres pour les couleurs, et les lettres pour les espèces de cartes : car on retomberait sur les combinaisons obtenues. Mais les couleurs peuvent se disposer d'après le 1.er tableau, et les espèces de cartes d'après le 2.e, ce qui donnerait $2 \cdot 24^2 = 1152$ combinaisons ; et, comme il y a toujours le 8.e de ces combinaisons qui ne diffèrent que par position, il n'y aura effectivement que $\frac{1152}{8} = 144$ manières réellement différentes, pour résoudre le problème.

S'il s'agissait d'arranger magiquement et sans répétition un plus grand nombre de choses, 7, par exemple, de chaque espèce, et 7 couleurs différentes, on agirait de même.

On propose ce 2.e problème.

On a 49 drapeaux de 7 formes différentes, dont 7 de chaque forme. Les couleurs dans chaque espèce sont aussi différentes, c'est-à-dire qu'il y a dans chaque forme un drapeau de couleur différente, ces couleurs revenant les mêmes pour chaque espèce de drapeau. On peut ajouter une troisième condition, par exemple, que les drapeaux soient portés par des officiers de sept corps différens, et qu'à chaque ligne figurent les officiers des sept corps.

Voici les quatre manières de composer le carré de 7 à nombres répétés, sans que la répétition ait lieu dans une même ligne.

1 2 3 4 5 6 7	1 2 3 4 5 6 7	1 2 3 4 5 6 7	1 2 3 4 5 6 7
3 4 5 6 7 1 2	4 5 6 7 1 2 3	5 6 7 1 2 3 4	6 7 1 2 3 4 5
5 6 7 1 2 3 4	7 1 2 3 4 5 6	2 3 4 5 6 7 1	4 5 6 7 1 2 3
7 1 2 3 4 5 6	3 4 5 6 7 1 2	6 7 1 2 3 4 5	2 3 4 5 6 7 1
2 3 4 5 6 7 1	6 7 1 2 3 4 5	3 4 5 6 7 1 2	7 1 2 3 4 5 6
4 5 6 7 1 2 3	2 3 4 5 6 7 1	7 1 2 3 4 5 6	5 6 7 1 2 3 4
6 7 1 2 3 4 5	5 6 7 1 2 3 4	4 5 6 7 1 2 3	3 4 5 6 7 1 2

Ces formes varient si l'on commence la 2.e ligne par le 3.e, le 4.e, le 5.e ou le 6.e nombre de la première.

Soient les espèces de drapeaux désignées par A, B, C, D, E, F, G; les couleurs par *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*; les corps des officiers par 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Que l'on combine entre elles les trois dernières formations du carré de 7, en substituant à la première de ces trois les lettres A, B, C, D, E, F, G; à la seconde les lettres *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, et laissant les chiffres à la 3.e. Ces formes seront alors :

A B C D E F G	*a b c d e f g*	1 2 3 4 5 6 7
D E F G A B C	*e f g a b c d*	6 7 1 2 3 4 5
G A B C D E F	*b c d e f g a*	4 5 6 7 1 2 3
C D E F G A B	*f g a b c d e*	2 3 4 5 6 7 1
F G A B C D E	*c d e f g a b*	7 1 2 3 4 5 6
B C D E F G A	*g a b c d e f*	5 6 7 1 2 3 4
E F G A B C D	*d e f g a b c*	3 4 5 6 7 1 2

Ajoutant par ordre, il viendra :

A*a*1	B*b*2	C*c*3	D*d*4	E*e*5	F*f*6	G*g*7
D*e*6	E*f*7	F*g*1	G*a*2	A*b*3	B*c*4	C*d*5
G*b*4	A*c*5	B*d*6	C*e*7	D*f*1	E*g*2	F*a*3
C*f*2	D*g*3	E*a*4	F*b*5	G*c*6	A*d*7	B*e*1
F*c*7	G*d*1	A*e*2	B*f*3	C*g*4	D*a*5	E*b*6
B*g*5	C*a*6	D*b*7	E*c*1	F*d*2	G*e*3	A*f*4
E*d*3	F*e*4	G*f*5	A*g*6	B*a*7	C*b*1	D*c*2

En jetant les yeux sur le résultat, on voit qu'on peut se dispenser de l'addition. En effet les lettres se succèdent par ordre, ainsi que les nombres. Il suffit donc de la 1.re horizontale et du commencement des suivantes. Mais les lettres A, B, C, etc., se trouvent en verticale de 3 en 3: elles seront donc A, D, G, C, F, B, E. Les lettres *a, b, c*, etc., se suivent de 4 en 4 en verticale : donc *a, e, b, f, c, g, d*. Enfin les nombres 1, 2, 3, etc., sont en verticale de 5 en 5 : ainsi 1, 6, 4, 2, 7, 5, 3. Il n'y aura plus de difficulté à faire les horizontales.

On peut encore former les horizontales d'après la première, comme suit :

On prend la 1.re lettre du 4.e groupe, la 2.e du 5.e, et la dernière du 6.e : ainsi D *e* 6 commencera la 2.e ligne.

Celle-ci formée, G *b* 4 commencera la 3.e ligne, et ainsi de suite.

Quant aux combinaisons, il est facile de les obtenir.

Les sept lettres se combinant de 1·2·3·4·5·6·7=5040 manières, on aura donc 5040^3 pour les 3 carrés de 7. De plus, puisqu'il y a quatre formes pour ce carré, il y aura quatre manières de prendre trois d'entre elles. Chacune de ces formes présente six combinaisons, puisque les lettres et les nombres peuvent s'arranger d'après l'un ou l'autre des trois systèmes choisis : on aura donc 4·6. Mais comme il y a toujours huit combinaisons qui ne diffèrent que par position, il faudrait diviser par 8 : ainsi il restera $3 \cdot 5040^3$ combinaisons différentes, ou 38,428,992,000.

On doit faire remarquer qu'après avoir adopté une lettre ou un nombre pour une espèce quelconque, par exemple 1 pour un corps, il ne faut plus supposer un autre nombre à ce corps pour avoir de nouvelles combinaisons : car, dans le cas particulier, on retomberait dans des combinaisons déjà obtenues.

Quelque considérable que soit le nombre qui exprime les différentes compositions des groupes, il serait très-difficile sans méthode d'arriver à une seule. Ce problème se résout plus facilement par les carrés magiques, comme on vient de le voir, que de toute autre manière.

§ 11.

PROBLÈMES A RÉSOUDRE.

Ce paragraphe indique les objets sur lesquels il serait

utile de s'exercer, et les problèmes dont la solution compléterait la théorie des carrés magiques.

1.° De combien de cases peut-on disposer pour un carré dont la racine est connue? Les auteurs ont reculé devant la solution de ce problème.

2.° Trouver une formule au moyen de laquelle on puisse obtenir toutes les manières de faire une bordure avec des nombres consécutifs, abstraction faite des variations dans chaque ligne entre les angles. Il suffit, pour résoudre le problème, de considérer la progression naturelle commençant par l'unité.

3.° Trouver la quantité A, c'est-à-dire tous les systèmes donnant une somme constante et connue, en prenant *n* nombres sur *an*. *a* et *n* sont les deux facteurs d'un produit. Ainsi, par exemple, les 21 premiers nombres fournissant des périodes de 7 et de 3, il s'agirait de déterminer toutes les manières d'obtenir 77 avec 7 nombres. On ne doit encore ici considérer que la progression des nombres naturels.

4.° Trouver la quantité B, c'est-à-dire tous les systèmes de A qui ne sont pas composés des mêmes nombres: chaque valeur de B comprend *a* systèmes de A. Il suffit d'en connaître $a-1$. Ainsi, pour 21, A étant connu, il suffit de connaître deux des systèmes de A dans lesquels il entrerait des nombres différens. En effet le 3.e système serait nécessairement déterminé.

5.° Trouver les valeurs de C, c'est-à-dire tous les systèmes qui donneraient 33, en prenant un nombre dans chaque système de A, dont la réunion forme une valeur de B.

On conçoit qu'il est inutile et qu'il faut soigneusement éviter d'avoir les systèmes de A qui n'auraient pas la condition de fournir ceux de B.

6.° Rechercher l'utilité qui peut et doit résulter des différentes combinaisons des carrés magiques. Il serait pénible de croire que des mathématiciens distingués auraient fait de sérieuses recherches pour connaître la composition de ces carrés, sans autre but que d'offrir un simple objet de curiosité, sans utilité réelle.

§ 12.

RÉCAPITULATION.

S'il ne s'agit que de faire un carré magique sans aucune condition, on doit recourir aux moyens expéditifs donnés pour les carrés impairs, et les pairs dont la racine se divise par 4. Quant à ceux dont la racine se divise par 2 seulement, il est bon de les construire au moyen d'une bordure, en réservant pour cela les nombres du milieu dont les différences sont les plus petites. Le carré renfermé dans la bordure, ayant alors sa racine divisible par 4, se construit immédiatement par la méthode expéditive. Or il est très-facile de parvenir à une bordure lorsque les différences se suivent, et sans être obligé de les écrire : il suffit de connaître la première différence, qui est la plus grande. On peut même se dispenser des différences, par exemple pour la bordure de 18 cases au carré de 16. Le carré de 18=324, un couple vaut 325; la bordure sera de 68 cases, et l'on aura 324—68=256, dont la moitié est

128 : ainsi le plus petit nombre est 129, et le plus grand 128+68=196, complément de 129. On aurait donc 128+34=162 pour le plus grand des petits nombres. Ainsi on peut faire l'horizontale par

162+161+160+159+158+157+138+137+136—156
—155—154—153—152—151—150—149—148

et la verticale par

162—161+147+146+145+144+133+131+130+129
—143—142—141—140—139—135—134—132

Comme il y a des millions de manières de faire cette bordure, on ne peut jamais être embarrassé. Les nombres négatifs doivent être soustraits de 325.

Les nombres étant trop grands, on peut se contenter de faire la bordure avec les 68 premiers nombres, *et l'on* substituera par ordre les nombres ci-dessus; ou mieux on ajoutera 128 à tous les nombres de la bordure provisoire pour faire la bordure avec les 68 premiers nombres; un couple vaut 68+1=69. La moitié 34,5 est la valeur moyenne de chaque nombre ; donc 34,5 · 18=621 est la somme de chaque ligne de bordure.

Comme une même ligne ne doit pas renfermer un nombre et son complément, on peut écrire les 34 premiers nombres, et au dessous leurs complémens.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
68	67	66	65	64	63	62	61	60	59	58	57	56	55	54	53	52	51	50	49	48	47	46	45	44	43	42	41	40	39	38	37	36	35

On peut faire la 1.re horizontale par

21	18	17	16	15	14	13	12	11	10	62	63	64	65	66	67	68	19	1.re horizontale.
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	35	36	37	38	49	60	61	50	1.re verticale.
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	7	6	5	4	3	2	1	48	2.e horizontale.
19	47	46	45	44	43	42	41	40	39	34	33	32	31	20	9	8	48	2.e verticale.

Les angles sont aux extrémités des lignes; les complémens correspondent aux nombres dans les lignes de même nature.

Si l'on préfère construire le carré d'après la méthode pour les racines qui se divisent par 4, on a donné la manière d'opérer les corrections que cette méthode exige.

CONCLUSION.

Il suit de tout ce qui précède que le présent traité n'a qu'un rapport assez éloigné avec ce qui a été écrit sur la matière. Des théories neuves, de nouvelles formes, des développemens nécessaires, de nombreux et curieux exemples, des démonstrations indispensables, et d'intéressantes recherches, rendent ce traité non-seulement beaucoup plus étendu, mais encore plus exact et plus clair qu'aucun de ceux qui sont répandus dans les Mémoires de l'académie. Les auteurs n'ont guère envisagé la question que sous un seul point de vue, aucun ne l'a approfondie. Les uns n'avaient pour but que de donner une idée succincte des carrés magiques (*Dictionnaire encyclopédique de mathématiques*, *Dictionnaire encyclopédique de l'amusement des sciences*, *Ozanam*, *Prestet*, *Kircher*, *Stiffel*, *Swenter*, *Meerman*, Acta Lipsiæ, *d'Ons-en-Bray*, *Rallier des Ourmes*). D'autres ont été rebutés par les difficultés qu'ils ont rencontrées (*Bachet de Mézériac*, *Poignard*, *Frénicle*). Enfin quelques-uns (*Lahire*, *Sauveur*) n'ont pas jugé à propos d'employer leur temps à de minutieuses recherches, quoique leurs Traités soient plus étendus que ceux des auteurs précédens.

Les planches qui accompagnent l'ouvrage sont indispensables pour faire convenablement comprendre le texte. Il est difficile, lorsque le sujet est abstrait, que le lecteur puisse suivre les idées d'un auteur sans le secours des figures.

Il serait presque impossible de donner un traité de géométrie sans y recourir, et elles sont ici bien autrement nécessaires.

Il ne faut donc pas considérer l'ouvrage que l'on donne au public comme une compilation : tout y est neuf, à l'exception de quelques idées premières dues presque toutes à La Hire. Lorsqu'on s'est servi des méthodes des auteurs, on a eu soin d'en avertir; on les a exposées avec détail, et l'on a restitué à chacun ce qui lui appartient. Mais les fausses croix, les faux châssis, les équerres, les bandes symétriques, les parties éparses d'un carré, sont des choses nouvelles. Les croix mêmes, les châssis, les compartimens et les cubes n'ont été qu'indiqués, mais non traités par Sauveur. Les méthodes proposées étaient ou incomplètes ou fautives ; on a complété les unes et rectifié les autres. L'art des compartimens était à peine connu. On en a fait un grand usage, comme d'un moyen sûr et prompt pour revenir du composé au simple. Ce genre de carrés est le plus gracieux de tous; et les méthodes expéditives, qu'on peut employer tant pour placer les carrés partiels que pour chacun d'eux en particulier, facilite singulièrement la formation des carrés. Ainsi, par exemple, le carré de 17 peut avoir une bordure qu'on formerait avec les 32 premiers et les 32 derniers nombres. Les 225 moyens seraient distribués en compartimens, soit en faisant 9 carrés de 25 cases, soit par le moyen de 25 carrés de 9 cases.

On s'est quelquefois appesanti sur certaines recherches.

Le lecteur peut passer les pages qui les contiennent, sans nuire à l'ensemble de l'ouvrage.

S'il plaisait de se faire une récréation de ce genre de combinaison des nombres, on pourrait distribuer une petite boîte en divers compartimens, d'après le tracé *planche* XLV.

Cette boîte sera à coulisse, de manière à ne laisser sortir que les nombres dont on voudra se servir. On ménagera une épaisseur suffisante à l'un des côtés de la boîte, pour y écrire les nombres, dont les supérieurs sont les racines, et dont les inférieurs sont les carrés qui répondent à ces racines.

On pourra donner 3 lignes aux petits carrés *n*, *n*. Le fond sera blanc, et les nombres noirs, depuis 1 jusqu'à 676. Chaque petit carré aura 1 ligne d'épaisseur; ses bords seront creusés à une profondeur d'une demi-ligne, sur $\frac{1}{4}$ de ligne de largeur. Les cases auront 3 lignes $\frac{1}{4}$ de largeur sur 7 de longueur, de manière que deux petits carrés soient contenus seulement dans la longueur, et qu'il y ait jeu suffisant pour les placer.

La profondeur de la boîte, jusqu'à la coulisse, sera proportionnée au plus fort carré qu'elle contiendra. Ici, la dernière case devant renfermer 676—625=51 petits carrés, il faudra environ 26 lignes : car il y aura 26 carrés l'un sur l'autre, et il est nécessaire qu'on réserve un peu de jeu.

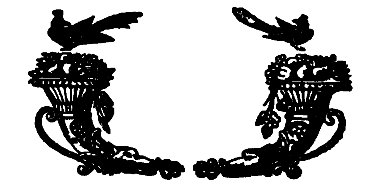
Les petites bandes, pour distinguer les bordures, croix, châssis, équerres, etc., seront d'une matière pesante et noire; en plomb, par exemple, qu'on aurait soin de noircir; leur largeur serait d'une demi-ligne faible, sur la même épaisseur, de manière à se placer dans les bords de deux carrés contigus, et dans leur profondeur. On en aura de trois formes, et en quantité suffisante.

La forme *a* sera la moins nombreuse, une trentaine peut suffire. Le côté *a* doit être exactement de la même dimension que le côté d'un petit carré. Les angles obtus sont, dans toutes les formes, de 135° ou $\frac{3}{2}$ angle droit, et par conséquent l'angle aigu de 45° ou $\frac{1}{2}$ angle droit. Cette forme sert pour des cases isolées.

La forme *b*, qui s'ajoute facilement à la précédente et à toutes les autres, sera nombreuse. Le côté *b* est toujours égal à celui d'un carré. Cette forme peut être doublée, triplée, etc., comme on le voit aux figures *c*, qu'il est bon de séparer.

La forme *d* doit être la plus nombreuse. Elle sert à alonger les lignes lorsqu'il est nécessaire, ce qui arrive fréquemment. Elle est simple *d*, double *e*, triple *f*, quadruple, quintuple, sextuple *g*. Ainsi, pour la bordure de 26, il faut 104 fois la longueur d'un côté de petit carré, dont 8 formes *b* pour les 4 angles, et par conséquent 96 côtés de petits carrés, ou 16 formes sextuples de *g*. Et s'il y avait 11 bordures, il faudrait 88 formes *b* aux angles; plus, pour un seul côté des 11 bordures, 24, 22, 20.... 4 $=(24+4)\frac{11}{2}=14\cdot 11=154$, dont le quadruple$=616$: il ne faut donc pas moins de 616 côtés de carrés; et, comme

ils ont 3 lignes de côté, c'est 1848 lignes, ou 154 pouces de bandes à extrémités rectangulaires. On ne peut employer que 88 bandes d'un pouce et demi, 16 d'un pouce, et 3 d'un demi-pouce pour l'une des combinaisons, qui donne 1848 lignes. Mais, comme il y en a beaucoup d'autres, on peut se contenter d'avoir 30 bandes de chaque espèce, simples, doubles, triples, quadruples, quintuples et sextuples; et autant des formes *c* : alors la forme *b* pourrait être plus nombreuse, et il serait bon d'en avoir 60 de cette espèce.



THÉORIE
DES PARALLÉLOGRAMMES
MAGIQUES.

Après avoir exposé, avec le plus grand détail, les formes que peuvent prendre les carrés magiques, et les manières de les construire, nous ne croyons pas inutile de présenter ici les moyens de composer les parallélogrammes magiques. Personne, nous le pensons, n'a eu l'idée de traiter cette matière, qui a cependant des rapports trop directs avec les carrés pour être passée sous silence. Nous avons conservé le nom de magiques : car, puisqu'il a été consacré, nous n'avons aucun motif pour en employer un nouveau.

Un parallélogramme magique diffère du carré magique en ce que celui-ci a le même nombre de cases en horizontale qu'en verticale, tandis que le premier en a plus en horizontale qu'en verticale (nous supposons ici, pour plus de simplicité, que ce plus grand nombre de cases se trouve en horizontale); dans le cas contraire on n'aurait que la même figure différemment placée.

Nous supposerons encore que les progressions sont celle des nombres naturels, dont le premier terme est l'unité : s'il en était autrement, la construction serait la même, il n'y aurait qu'une substitution à effectuer.

Pour distribuer les nombres de la progression en parallélogramme, il faut nécessairement que le nombre des termes se décompose en facteurs : d'où il suit que les

nombres premiers ne peuvent servir à la formation des parallélogrammes.

Si le nombre des termes de la progression est impair, et décomposable en facteurs, on pourra toujours avoir un parallélogramme : car la formule qui exprime la somme des termes d'une progression arithmétique étant $S=\left(\frac{a+u}{2}\right)n$, elle deviendra, dans le cas particulier, où la progression est celle des nombres naturels et commençant par l'unité, $S=\left(\frac{1+n}{2}\right)n$; mais puisque n est impair, $\frac{1+n}{2}$ est un entier.

Si le nombre des termes est pair, alors $\frac{1+n}{2}$ est fractionnaire : d'où il suit que le moyen est lui-même fractionnaire. Donc les deux facteurs doivent être pairs l'un et l'autre : autrement les horizontales ou les verticales seraient fractionnaires, ce qui ne peut être lorsqu'on n'emploie que des entiers. Ainsi on supprimera, comme inutiles à considérer, toute décomposition où entre un *facteur impair*. Par exemple, 60 se décompose en 2 et 30, 3 et 20, 4 et 15, 5 et 12, 6 et 10; mais il n'y a que 2 et 30, 6 et 10, qui puissent donner des parallélogrammes.

Pour opérer avec facilité, il est bon d'employer les différences : on évite des tâtonnemens que les nombres occasioneraient infailliblement.

Il n'est pas nécessaire de faire le tableau des différences : il suffit de connaître la plus grande, qui est égale au moyen moins l'unité.

Il n'en est pas des parallélogrammes comme des carrés, puisque les horizontales et les verticales n'ont pas le même nombre de cases. Il suffit donc que toutes les horizontales aient même somme, et les verticales aussi même somme, mais différente de la première. Il est clair

qu'il n'y a point de diagonale dans un parallélogramme.

Si le nombre des termes de la progression était un nombre carré, le parallélogramme se confondrait avec le carré; mais il pourrait y avoir autre décomposition que celle qui comprendrait deux facteurs égaux : ainsi 81 peut se distribuer en facteurs 3, 27, et alors il y a parallélogramme.

Pour obtenir un parallélogramme magique, on formera autant de groupes de différences =0 qu'il y aura de verticales, ou de différences à l'une des horizontales; et pour avoir celles-ci, on prendra une différence de chaque groupe, de manière que la somme soit=0. Substituant les nombres aux différences, l'opération se terminera. On peut aussi agir d'abord sur les horizontales, et en tirer les verticales, mais la première méthode est préférable.

Il est facile d'obtenir immédiatement les nombres à substituer aux différences. Si l'une de celles-ci est négative, on l'ajoute au moyen, et on la soustrait du moyen si elle est positive. Cette opération se fait à l'œil lorsqu'on a un peu d'habitude du calcul : elle est la même que celle qu'on pratique pour les carrés magiques, et sur laquelle on s'est expliqué ailleurs. Venons aux applications.

CHAPITRE PREMIER.

LE NOMBRE DES TERMES DE LA PROGRESSION EST IMPAIR.

ARTICLE PREMIER.

PARALLÉLOGRAMME DE 15.

Le plus petit nombre impair susceptible d'être construit en parallélogramme est 15, composé des deux pre-

miers nombres impairs, l'unité exceptée. Le moyen est $\frac{15+1}{2}=8$: donc les horizontales auront $5 \cdot 8=40$, et les verticales $3 \cdot 8=24$. La plus grande différence est $8-1=7$; le moyen 8 a 0 pour différence. Soient faits les groupes comme suit en verticale :

$$\begin{array}{c} +6+5+4+3+7 \\ +1-4+2+0-2 \\ -7-1-6-3-5 \end{array}$$

Prenant une différence de chacun de ces groupes, on peut obtenir les verticales

$$\left.\begin{array}{l} -7-4+4+0+7 \\ +6-1-6+3-2 \\ +1+5+2-3-5 \end{array}\right\} \text{et en nombres :} \left\{\begin{array}{ccccc} 15 & 12 & 4 & 8 & 1 \\ 2 & 9 & 14 & 5 & 10 \\ 7 & 3 & 6 & 11 & 13 \end{array}\right.$$

On pourrait encore avoir

$$\left.\begin{array}{l} +6+5-6-3-2 \\ -7-4+4+0+7 \\ +1-1+2+3-5 \end{array}\right\} \text{et en nombres :} \left\{\begin{array}{ccccc} 2 & 3 & 14 & 11 & 10 \\ 15 & 12 & 4 & 8 & 1 \\ 7 & 9 & 6 & 5 & 13 \end{array}\right.$$

On arriverait plus facilement au résultat en composant les groupes de manière que, deux d'entre eux étant construits, on en formât deux autres complémentaires ; le dernier aurait lieu naturellement. Soient donc les deux premiers groupes et leurs complémentaires

$$\begin{array}{l} +1+5+3+7 \\ +6-3+2-1 \\ -7-2-5-6 \end{array} \quad \text{Le dernier sera} \left\{\begin{array}{l} +4 \\ +0 \\ -4 \end{array}\right.$$

On pourra avoir les horizontales

$$\begin{array}{c} +1-6-2+3+4 \\ +6-1-3+2-4 \\ -7+7+5-5+0 \end{array}$$

On voit ici deux horizontales dont l'une est complément de l'autre. Il faut avoir soin que les trois différences de chaque groupe se retrouvent dans chaque verticale, comme on le remarque ici. Le parallélogramme en nombres est

7	14	10	5	4
2	9	11	6	12
15	1	3	13	8

ARTICLE II.

PARALLÉLOGRAMME DE 21.

Soient les groupes

$$+10+9+8+2+7+3+5$$
$$-9+1-6+6-3+4+0$$
$$-1-10-2-8-4-7-5$$

On a formé trois groupes et trois complémentaires; le dernier comprend 0 et une seule différence avec le double signe. Les horizontales peuvent être

$$+10-10+8-8+7-7+0$$
$$-9+1-2+6-4+3+5$$
$$-1+9-6+2-3+4-5$$

On a encore ici une horizontale complément d'une autre.

Il viendrait en nombres le parallélogramme ci-dessous. Les horizontales ont 7·11=77, et les verticales 3·11=33.

1	21	3	19	4	18	11
20	10	13	5	15	8	6
12	2	17	9	14	7	16

ARTICLE III.

PARALLÉLOGRAMME DE 35.

Le moyen est 18; la plus grande différence est 17, et l'on peut faire les groupes de manière à en avoir trois complémentaires de trois autres; le 7.e n'aura que deux différences avec le double signe, et 0.

Soient ces groupes

+17+15+13+10+11+ 9+2
+16+14+12+ 8+ 6+ 5+1
—15+ 4—10+ 7— 9+ 3+0
—14—17— 8—13— 5—11—1
— 4—16— 7—12— 3— 6—2

Qu'on forme les horizontales

—15+15+12+10— 9—11—2
+17—17+13—13— 5+ 3+2
+16—16— 7—12+11+ 9—1
—14+14—10+ 7— 3+ 5+1
— 4+ 4— 8+ 8+ 6— 6+0

Il viendra le parallélogramme

33	3	6	8	27	29	20
1	35	5	31	23	15	16
2	34	25	30	7	9	19
32	4	28	11	21	13	17
22	14	26	10	12	24	18

ARTICLE IV.

PARALLÉLOGRAMME DE 105.

Puisque 105=3.5.7, on peut faire trois espèces de

parallélogrammes, savoir : par 3 et 35, 5 et 21, 7 et 15. Le moyen est 53; la plus grande différence = 52.

Soit composé le parallélogramme par 3, 35, et qu'on forme d'abord 14 groupes et les 14 complémentaires : il en restera 7 à construire. Il est convenable d'employer d'abord les plus grandes différences, ainsi que nous l'avons remarqué pour les carrés magiques. Il est en effet plus commode d'opérer sur de petites différences lorsqu'il faut faire les 7 groupes restans et les 7 horizontales. Au moyen des 14 groupes complémentaires, on n'a plus à s'occuper des horizontales résultant des 28 premiers groupes. Il suffira donc que l'on puisse construire les 7 groupes restans, et en tirer 7 horizontales. On arrive facilement au résultat cherché, par cette méthode expéditive.

Soient donc ces 14 groupes :

+52+51+50+49+48+47+46+45+44+43+42+41+40+39
—27—28—26—30—31—32—33—29—34—22—35—36—37—38
—25—23—24—19—17—15—13—16—10—21— 7— 5— 3— 1

On ne sera jamais embarrassé pour ces premiers groupes; mais il pourrait se faire que les différences restantes ne se prêtassent pas à la composition des 7 groupes à obtenir, et même que, ces groupes formés, on ne puisse en tirer les horizontales. Nous indiquerons le moyen de s'en assurer.

Si l'on ajoute à la suite des horizontales ci-dessus les complémentaires, on aura les horizontales pour 28 groupes, savoir :

+52+51—51—52+50—50+49—49—48+48+47+46+45—45—47—46+44+43+42
+41+40+39—39—40—41—42—43—44
—27—28+28+27—26+26—30+30+31—31—32—33—29+29+32+33—34—22—35
—36—37—38+38+37+36+35+22+34
—25—23+23+25—24+24—19+19+17—17—15—13—16+16+15+13—10—21— 7
— 5— 3— 1+ 1+ 3+ 5+ 7+21+10

On voit qu'on a placé à volonté les groupes complémentaires.
Il reste les différences 0, 2, 4, 6, 8, 9, 11, 12, 14, 18, 20.

Qu'on choisisse les groupes
{+20+18+11+12+14+ 9+6
{—12—14— 9+ 8+ 4+ 2—6
{— 8— 4— 2—20—18—11+0
} Il faut en tirer les 3 horizontales.

Que ces horizontales soient
{— 8+18+11+6—20+ 4—11
{—12— 4— 9—6+ 8+14+ 9
{+20—14— 2+0+12—18+ 2

On voit les mêmes groupes que ci-dessus; mais les différences sont prises dans chacun, de manière à avoir la somme de chaque horizontale = 0. Il n'y a plus qu'à ajouter ces horizontales partielles à celles ci-dessus, et substituer les nombres, ce qui donnera le parallélogramme

1	2	104	105	3	103	4	102	101	5	6	7	8	98	100	99	9	10	11	12	13	14	92	93	94	95	96	97	61	85	42	47	73	49	64
80	81	25	26	79	27	83	23	22	84	85	86	82	24	21	20	87	75	88	89	90	91	15	16	17	18	84	19	65	57	62	59	45	39	44
78	76	30	28	77	29	72	34	36	70	68	66	69	37	38	40	63	74	60	58	56	54	52	50	48	46	32	43	33	67	55	53	41	71	51

Pour connaître si l'on peut faire les horizontales avec les groupes ci-dessus, comme il y a 3 complémentaires, on combinera chaque différence d'un groupe avec celles du complémentaire; on agira de même pour un autre groupe; ensuite on ajoutera, terme à terme, les deux séries de différences, et l'on obtiendra une série A. On combinera ensuite le 3.e groupe avec son complémentaire, et l'on ajoutera à la série résultante les termes du 4.e groupe, et l'on aura une série B. Si l'on trouve des termes égaux dans l'une et l'autre série A et B, avec changement de signe pour l'un des termes, on obtiendra une horizontale. S'il se rencontre deux autres termes égaux, au signe près, il viendra une autre horizontale, et ainsi de suite. Il est inutile de donner des exemples, et d'ailleurs cette méthode est longue et fatigante; c'est cependant le seul moyen d'obtenir toutes les horizontales que peuvent fournir des groupes choisis à volonté.

Nous allons donner la manière de calculer toutes les combinaisons pour un système adopté; celui qui nous occupe en ce moment, par exemple.

Supposant donc les 14 groupes tels qu'ils ont été choisis : les trois nombres de chacun se combinent de six manières différentes, ce qui donne pour les 14, 6^{14}. Il ne faut pas s'occuper des combinaisons des nombres des 14 groupes complémentaires, puisque ces nombres doivent être sur la même horizontale que leurs complémens à 106. Maintenant, les sept groupes formés à part peuvent prendre six positions : on aura donc 6^{15} en tout. Mais les 35 groupes peuvent se combiner entre eux de (1·2·3... 35) manières différentes, puisque leur place est indiffé-

rente. Ils sont considérés comme de simples nombres. Il n'y aura qu'à diviser le produit 6^{15} $(1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 35)$ par 4, si l'on veut avoir égard au simple changement de position : car il y aura toujours deux positions égales de haut en bas, et deux autres aussi égales de droite à gauche. Il n'est pas ici question de renversement des horizontales en verticales, et réciproquement : dans ce cas il faudrait diviser par 8; mais ce changement n'est pas entré dans la supposition qui fait l'objet de notre recherche. Ce produit $\frac{6^{15}(1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 35)}{4}$ donne un nombre prodigieux. La 15.e puissance de 6 est 470,184,984,576, et ce nombre n'est rien, comparé au facteur $\frac{(1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 35)}{4}$, qui le multiplie.

On n'a considéré ici qu'un système; mais combien peut-on en obtenir ? Le nombre en est très-grand, et il serait difficile de le trouver. La formule d'Euler peut bien donner toutes les manières d'obtenir la valeur d'un groupe; mais il y aurait des nombres déjà employés, et cette formule ne peut être ici d'aucune utilité. D'ailleurs elle ne donnerait pas les moyens de tirer de groupes ne contenant aucuns nombres semblables, les horizontales possibles.

Le nombre de combinaisons pour un système choisi, est ici plus grand que dans un carré, parce qu'il n'y a pas de diagonales, lesquelles s'opposent aux changemens dont les parallélogrammes sont susceptibles.

Nous donnons cet exemple de combinaisons des parallélogrammes, en faisant observer qu'elles seraient moins nombreuses s'il n'y avait pas de groupes complémentaires : car alors on ne pourrait opérer que sur les horizontales entières, et le facteur 6^{15} se réduirait à 6.

Venons au cas des deux facteurs 5 et 21. Qu'on forme d'abord 7 groupes et leurs 7 complémentaires, comme:

+52+50+48+46+44+42+24—24—42—44—46—48—50—52
+51+49+47+45+43+41+23—23—41—43—45—47—49—51
—33—32—31—38—39—40—22+22+40+39+38+31+32+33
—34—30—29—28—27—26—19+19+26+27+28+29+30+34
—36—37—35—25—21—17— 6+ 6+17+21+25+35+37+36

Il est clair que la somme des différences de chaque horizontale est $=0$, puisqu'elle contient les nombres avec le double signe; il n'y a plus à ajouter que 7 groupes dont les horizontales soient aussi $=0$. Ces groupes doivent se faire avec les différences restantes 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 20, 0.

Soient les groupes

+20+16+11+1—11—16—20
+18+13+ 4+3— 4—13—18
—14—12— 8+0+ 8+12+14
—15—10— 5—3+ 5+10—15
—9— 7 — 2—1+ 2+ 7+ 9

Qu'on en tire les horizontales

+20+13— 8—3—11+ 7—18
—14+16+ 4+0— 4—16+14
— 9—12— 5—1+ 2+10+15
+18— 7+11+3+ 8—13—20
—15—10— 2+1+ 5+12+ 9

On peut remarquer trois groupes, complémens de trois autres; et, parmi les horizontales, deux d'entre elles, complémens de deux autres; mais les mêmes différences avec changement de signe ne sont pas les unes sous les autres, ce qui ne se peut, puisqu'il y a une 5.e horizontale dont les différences rendraient les quatre autres fautives.

Ajoutant ces horizontales, et dans l'ordre qu'on voudra, aux précédentes, on aura, par exemple :

—50+52+50+20— 8—24—42+48+13—3—11—44—46—52—48+46+44+42+24+ 7—18
—49+51+49—14+ 4—23—41+47+16+0— 4—43—45—51—47+45+43+41+23—16+14
+32—33—32— 9— 5+22+40—31—12—1+ 2+39+38+33+31—38—39—40—22+10+15
+30—34—30+18+11+19+26—29— 7+3+ 8+27+28+34+29—28—27—26—19—13—20
+37—36—37—15— 2+ 6+17—35—10+1+ 5+21+25+36+35—25—21—17— 6+12+ 9

On voit que les groupes primitifs sont mêlés à volonté avec les complémentaires et avec les sept ci-dessus, mais de manière que les horizontales soient toujours = 0. Voici le parallélogramme en nombres :

103	1	3	33	61	77	95	5	40	56	64	97	99	105	101	7	9	11	29	46	71
102	2	4	67	49	76	94	6	37	53	57	96	98	104	100	8	10	12	90	69	39
21	86	85	62	58	31	13	84	65	54	51	14	15	20	22	91	92	93	75	43	38
23	87	83	35	42	34	27	82	60	50	45	26	25	19	24	81	80	79	72	66	73
16	89	90	68	55	47	36	88	63	52	48	32	28	17	18	78	74	70	59	41	44

On trouverait que les combinaisons (en supposant les horizontales et les verticales constantes, et telles qu'elles sont dans le parallélogramme) s'élèvent à 1,532,728,265,151,283,200,000, nombre prodigieux, pour une seule supposition.

On va terminer ce qui concerne le nombre impair de termes par la troisième décomposition en facteurs, 7, 15. On fera cinq groupes de sept différences=0, et les cinq groupes complémentaires. Soient ces groupes

+ 52	+ 49	+ 46	+ 34	+ 30
+ 51	+ 48	+ 45	+ 32	+ 29
+ 50	+ 47	+ 44	+ 31	+ 23
— 40	— 38	— 43	— 26	— 28
— 41	— 37	— 36	— 25	— 20
— 39	— 42	— 35	— 24	— 19
— 33	— 27	— 21	— 22	— 15

Il reste les différences en plus et en moins, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18.

On peut, sans recourir aux moyens exposés ci-dessus, obtenir immédiatement les cinq groupes à former avec les différences restantes. Ils sont d'autant plus faciles à construire, que les différences se suivent, et sont plus petites. On remarquera de plus que l'on a choisi pour chaque horizontale deux différences complémentaires, ce qui a réduit la question à ne s'occuper que de trois différences par horizontale; il a même suffi d'obtenir quatre horizontales, parce qu'il y en a trois complémentaires de trois autres. Voici ces horizontales et les groupes:

+ 18	+ 9	+ 2	— 11	— 18
+ 17	+ 11	— 2	— 9	— 17
+ 14	— 10	+ 3	+ 7	— 14
— 16	— 7	— 3	+ 10	+ 16
— 13	— 4	— 1	+ 5	+ 13
— 12	— 5	+ 1	+ 4	+ 12
— 8	+ 6	+ 0	— 6	+ 8

Réunissant les parties d'horizontales, et intercalant celles ci-dessus entre les premières et leurs complémentaires, on aurait :

+52+49+46+34+30	+18+ 9+2—11—18	—30—34—46—49—52
+51+48+45+32+29	+17+11—2— 9—17	—29—32—45—48—51
+50+47+46+31+23	+14—10+3+ 7—14	—23—31—44—47—50
—40—38—43—26—28	—16— 7—3+10+16	+28+26+43+38+40
—41—37—36—25—20	—13— 4—1+ 5+13	+20+25+36+37+41
—39—42—35—24—19	—12— 5+1+ 4+12	+19+24+35+42+39
—33—27—21—22—15	— 8+ 6+0— 6+ 8	+15+22+21+27+33

Voici le parallélogramme en nombres :

1	4	7	19	23	35	44	51	64	71	83	87	99	102	105
2	5	8	21	24	36	42	55	62	70	82	85	98	101	104
3	6	9	22	30	39	63	50	46	67	76	84	97	100	103
93	91	96	79	81	69	60	56	43	37	25	27	10	15	13
94	90	89	78	73	66	57	54	48	40	33	28	17	16	12
92	95	88	77	72	65	58	52	49	41	34	29	18	11	14
86	80	74	75	68	61	47	53	59	45	38	31	32	26	20

Les combinaisons pour le cas actuel seraient les suivantes :

D'abord les sept premiers groupes peuvent chacun se combiner de (1·2·3·4·5·6·7) manières ; et, comme il y a 5 groupes, on aura $(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7)^5$; les groupes complémentaires suivant le mouvement des précédens, il n'y a pas à s'en occuper. Maintenant, les 7 horizontales intercalées se combinent de (1·2·3·4·5·6·7) manières : il viendra donc le facteur $(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7)^6$; enfin les 15 verticales se combinent de (1·2·3. . . . . 15) façons : d'où il suit que le nombre total des combinaisons est $\frac{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 7)^6 (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 15)}{4}$, en faisant abstraction des positions différentes.

Passons aux progressions dont le nombre de termes est pair.

CHAPITRE II.

LE NOMBRE DE TERMES DE LA PROGRESSION EST PAIR.

D'après ce qui a été dit, il ne peut être fait de parallélogramme, lorsque la décomposition en facteurs a un de ces facteurs impair : d'où il suit que tout nombre pair divisible seulement par 2 ne peut donner de parallélogramme.

Lorsque le nombre pair se divise par 4, il peut y avoir plusieurs décompositions en facteurs, et il ne faut retenir que celles qui ont les deux facteurs pairs.

ARTICLE PREMIER.

PARALLÉLOGRAMME DE 8.

Le plus petit nombre pair qu'on puisse distribuer en parallélogramme est 8. On arrive facilement au résultat

cherché. Chaque verticale doit avoir un nombre et son complément à 9. Il faudra donc les composer par 8, 1... 7, 2... 6, 3... 4, 5; le moyen est $\frac{9}{2}$; les horizontales auront $\frac{9}{2}\cdot 4=18$. Il faut donc faire 18 en prenant un nombre de chaque verticale, et il suffit d'en obtenir une; l'autre suit nécessairement. Il n'y a que 8, 2, 3, 5 qui satisfasse; l'autre horizontale sera 1, 7, 6, 4, dont les nombres se mettent sous les premiers, et par ordre. On aura donc

8	2	3	5
1	7	6	4

Il n'a pas été nécessaire de recourir aux différences, et il n'y a que cette distribution.

ARTICLE II.

PARALLÉLOGRAMME DE 12.

Il n'y a que la décomposition 2, 6, qui convienne; il faut 13 en verticale, et 39 en horizontale. La composition des verticales est 1, 12...2, 11...3, 10...4, 9...5, 8... 6, 7. Prenant un nombre de chacune pour avoir 39, il viendra :

12	10	2	4	5	6
1	3	11	9	8	7

C'est encore la seule manière de faire le parallélogramme; il n'y a ici que $3\cdot 4\cdot 5\cdot 6=360$ combinaisons réellement différentes.

ARTICLE III.

PARALLÉLOGRAMME DE 16.

Comme il est toujours facile de faire le parallélogramme

dont les verticales n'ont que deux termes, nous donnons ici le dernier exemple. La seule décomposition est 2, 8 : car 4, 4 rentre dans les carrés. Les verticales auront 17, et les horizontales 68. Les premières seront nécessairement 1, 16... 2, 15... 3, 14... 4, 13... 5, 12... 6, 11... 7, 10. .. 8, 9. Les horizontales peuvent être

	16	15	3	4	5	6	10	9
ou bien	16	2	3	13	5	11	10	8
	16	2	14	4	5	11	7	9
	16	2	3	13	12	6	7	9

Il suffit de donner ici l'une des horizontales, l'autre comprenant les complémens terme à terme.

ARTICLE IV.

PARALLÉLOGRAMME DE 24.

24 est le premier nombre qui ait pour facteurs 4 et un autre nombre pair. Ensuite de 8 en 8 on trouvera pour plus petit facteur 4, n'y comprenant pas le facteur 2. Tous les nombres compris entre ces limites ne sont décomposables qu'en 2 facteurs, dont l'un est 2, et l'autre pair, ou 4 et impair. Donc, pour connaître si un nombre est décomposable en 2 facteurs pairs dont le plus petit soit 4, il faut diviser ce nombre par 8. Ainsi 200 divisé par 8 donne 25, nombre entier : donc 200 aura deux facteurs pairs, non compris 2. 132 divisé par 8 donne pour quotient une fraction : ainsi point de diviseurs tous deux pairs. Il en est de même de tous les nombres non divisibles par 8.

Venons au parallélogramme de $24 = 4 \cdot 6$: la plus grande différence est 11,5.

On peut avoir trois groupes et leurs complémentaires, comme :

+11,5+7,5+3,5—11,5—7,5—3,5
+ 8,5+4,5+0,5— 8,5—4,5—0,5
—10,5—6,5—2,5+10,5+6,5+2,5
— 9,5—5,5—1,5+ 9,5+5,5+1,5

Ensuite faire les horizontales comme suit, ou les laisser comme ci-dessus :

+11,5+7,5—2,5+11,5—7,5+2,5
+ 8,5+4,5+3,5— 8,5—4,5—3,5
—10,5—5,5—1,5+10,5+5,5+1,5
— 9,5—6,5+0,5+ 9,5+6,5—0,5

On voit aussi les horizontales composées de nombres complémens l'un de l'autre.

Cette manière d'opérer est très-simple et très-commode.

Le parallélogramme en nombres est

1	5	15	24	20	10
4	8	9	21	17	16
23	18	14	2	7	11
22	19	12	3	6	13

ARTICLE V.

PARALLÉLOGRAMME DE 60.

Voyons le parallélogramme de 60=6·10. Nous négligeons les facteurs 2, 30; et ceux 3, 20...4, 15...5, 12, ont des impairs, et ne peuvent fournir de parallélogramme. Le moyen est $\frac{61}{2}$=30,5; la plus grande différence est 29,5; les groupes auront en nombres 183, et les horizontales 305. On peut faire les groupes et les horizontales comme suit :

+29,5	+24,5	+18,5	+12,5	+6,5	−6,5	−12,5	−18,5	−24,5	−29,5
+28,5	+23,5	+17,5	+11,5	+4,5	−4,5	−11,5	−17,5	−23,5	−28,5
−27,5	−22,5	−16,5	−10,5	−5,5	+5,5	+10,5	+16,5	+22,5	+27,5
−26,5	−20,5	−15,5	− 8,5	−3,5	+3,5	+ 8,5	+15,5	+20,5	+26,5
−25,5	−19,5	−13,5	− 7,5	−1,5	+1,5	+ 7,5	+13,5	+19,5	+25,5
+21,5	+14,5	+ 9,5	+ 2,5	−0,5	+0,5	− 2,5	− 9,5	−14,5	−21,5

On a suivi la même marche que pour le parallélogramme de 24.

On aurait en nombres :

1	6	12	18	24	37	43	49	55	60
2	7	13	19	26	35	42	48	54	59
58	53	47	41	36	25	20	14	8	3
57	51	46	39	34	27	22	15	10	4
56	50	44	38	32	29	23	17	11	5
9	16	21	28	31	30	33	40	45	52

Le nombre de combinaisons pour les groupes et horizontales ci-dessus est facile à calculer. Chaque groupe se combine de (1·2·3·4·5·6) manières ; et, comme il y en a 5, non compris les 5 complémentaires, qui suivent le mouvement des premiers, on aura $(1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6)^5$. Maintenant, les 10 groupes se combinent entre eux de (1·2·3·4·5·6·7·8·9·10) manières : donc le nombre de combinaisons sera $\frac{(1\cdot2\cdot3\ldots10)\,(1\cdot2\ldots6)^5}{4}$, en faisant attention aux combinaisons qui ne diffèrent que par position de droite à gauche ou de haut en bas.

Le calcul donne 175,535,727,575,040,000,000.

Lorsque l'un des facteurs est 2, l'autre étant pair, la formule d'Euler poussée assez loin, donnera toutes les horizontales, dont la moitié représentera tous les systèmes pour le cas que l'on considère.

Il reste à faire voir qu'on n'éprouverait pas plus de difficulté si la progression était différente de celle que l'on a considérée, et même si elle était interrompue.

CHAPITRE III.

LA PROGRESSION EST QUELCONQUE.

Après avoir fait un parallélogramme avec la progression naturelle des nombres, à commencer par l'unité, qu'on ait à construire le parallélogramme avec une autre progression d'un même nombre de termes : il n'y aura qu'à substituer ceux-ci à ceux de la première progression. Par exemple :

Soit la progression 7·10·13... 49, de 15 termes, à distribuer en parallélogramme. On a donné ailleurs ce parallélogramme, que voici :

15	12	4	8	1
2	9	14	5	10
7	3	6	11	13

Qu'on mette les nombres de ce parallélogramme sous la progression 7·10... 49, comme suit :

7·10·13·16·19·22·25·28·31·34·37·40·43·46·49
1· 2· 3· 4· 5· 6· 7· 8· 9·10·11·12·13·14·15

Et qu'on substitue les nombres supérieurs aux inférieurs, on aura :

49	40	16	28	7
10	31	46	19	34
25	13	22	37	43

Le moyen est $\frac{49+7}{2}=28$. Ainsi les horizontales auront $5\cdot28=140$, et les verticales $3\cdot28=84$.

Il en serait de même des autres. On pourrait aussi opérer immédiatement sur la progression 7....49; mais il est plus commode d'employer le moyen ci-dessus, parce que la progression la plus simple est la plus facile à convertir en parallélogramme.

Si la progression était interrompue, il serait parfois nécessaire de faire quelque changement à des lignes dont les unes auraient plus ou moins qu'elles n'exigent : ainsi, soit la progression interrompue, et les nombres de la progression naturelle placés dessous :

7.10.13.16.19... 36.39.42.45.48... 65.68.71.74.77
1. 2. 3. 4. 5 . 6. 7. 8. 9.10 . 11.12.13.14.15

Si l'on substitue les nombres supérieurs aux inférieurs, on aurait, pour le parallélogramme cherché, d'après le type ci-dessus :

77	68	16	42	7
10	45	74	19	48
39	13	36	65	71

En vérifiant les lignes, on voit que, le moyen étant 42, les verticales ont bien 3.42=126; mais la 2.e horizontale n'a que 196, et la 3.e 224, au lieu de 210=5.42 qu'elles doivent avoir. Ainsi l'une a 14 de moins, et l'autre 14 de plus : il faut en conséquence, sans toucher aux verticales quant aux nombres qui les composent, voir si, en transposant 1, ou 2, ou 3 nombres de l'une des horizontales, on peut les corriger toutes deux. Or 45+19=64, et 13+65=78; la différence est 78—64=14. Substituant les nombres les uns aux autres, et dans les mêmes verticales, on aura :

77	68	16	42	7
10	13	74	65	48
39	45	36	19	71

Si l'on eût opéré sur le parallélogramme de 15 aussi donné, et qui est :

2	3	14	11	10		10	13	74	65	48
15	12	4	8	1	, il serait venu	77	68	16	42	7
7	9	6	5	13		39	45	36	19	71

Il n'y aurait rien eu à corriger.

Nous n'en dirons pas davantage sur ces progressions interrompues : il s'agissait de faire voir que toute progression suivie peut être distribuée en parallélogramme dans les mêmes cas que la progression naturelle des nombres, et que les progressions interrompues exigeaient vérification, et quelquefois correction.

CHAPITRE IV.

PROGRESSIONS GÉOMÉTRIQUES ET HARMONIQUES.

Rien n'est facile comme la composition des parallélogrammes avec une progression géométrique, lorsque le même parallélogramme a été construit avec progression arithmétique. Ainsi, reprenons le parallélogramme de 15, qui est :

15	12	4	8	1
2	9	14	5	10
7	3	6	11	13

Que la progression géométrique soit 1·2·4·8·16, etc., qu'on peut mettre sous la forme $2^0 \cdot 2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3$, etc. Il n'y

aura qu'à donner à 2 pour exposans les nombres du parallélogramme diminués d'une unité, et le parallélogramme géométrique sera :

$$\begin{matrix} 2^{14} & 2^{11} & 2^{3} & 2^{7} & 2^{0} \\ 2^{1} & 2^{8} & 2^{13} & 2^{4} & 2^{9} \\ 2^{6} & 2^{2} & 2^{5} & 2^{10} & 2^{12} \end{matrix}$$

En effet, les produits des nombres de chaque horizontale sont égaux ; ceux des verticales le sont également. Celles-ci sont 2^{21}, et les horizontales 2^{35}. En effet, la somme de tous les exposans est $1+2\ldots+14=7\cdot15$, ce qui donne, en divisant par 3, $7\cdot5=35$; et en divisant par 5, $7\cdot3=21$. Il en sera de même pour tous les cas.

Quant aux progressions harmoniques, ce sont les plus faciles à composer en parallélogrammes. Il suffit d'écrire de suite les termes de la progression pour faire une horizontale, et de continuer la progression pour faire la seconde, comme suit. Nous choisissons la plus simple des progressions harmoniques. (Voir, aux carrés magiques, ce que nous avons dit sur ces progressions.)

$$\begin{matrix} \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \\ \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{10} \\ \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{14} \cdot \frac{1}{15} \end{matrix}$$

On voit que les verticales sont en progression harmonique comme les horizontales, ce qui est la seule condition exigée. Si l'on voulait chasser les fractions, il viendrait les nombres suivans. Le plus petit dénominateur commun est le produit des nombres $11\cdot12\cdot13\cdot14\cdot15=360360$, et qui sera le premier terme de la progression harmonique suivante en nombres entiers.

360360 : 180180 : 120120 : 90090 : 72072 | : 60060 : 51480 : 45045 : 40040 : 36036 | : 32760 : 30030 : 27720 : 25240 : 24024

Divisant en trois cette progression, et mettant la 2.e partie sous la 1.re, et la 3.e sous la 2.e, on a le parallélogramme harmonique.

Nous terminons ici ce que nous voulions dire sur les parallélogrammes magiques. On pourrait bien encore rechercher les moyens de diviser un parallélogramme en plusieurs autres aussi magiques, ce qui revient aux carrés à compartimens : ainsi $105=3\cdot5\cdot7$ aurait dans ce cas 35 groupes de 3 nombres; et les horizontales, divisées en 5 parties de 7 nombres, seraient magiques pour chaque partie, et ainsi de suite. Cela ne peut arriver que pour des nombres ayant au moins 3 diviseurs. Cette distribution est curieuse, et nous l'abandonnons à ceux qui aiment ce genre de recherches.





TRAITÉ

DES

CUBES MAGIQUES.

Voici une théorie neuve, dont la première idée est due à Sauveur. Cet auteur s'est contenté de donner un exemple sur le cube de 5. Encore suppose-t-il que les termes moyens sont en diagonale, et ne concourent pas tous au même angle. Dans le cas de concours il y aurait, en effet, des nombres répétés; mais il n'est pas nécessaire que le moyen soit en diagonale. Il ne donne rien sur les cubes dont la racine est paire; et il est aussi diffus lorsqu'il parle de cubes magiques, qu'il l'est lorsqu'il traite des carrés. Il est presque impossible de lire son mémoire depuis l'article 24 jusqu'au 58.e. Il faut convenir que, malgré l'approbation de l'académie, dont il était membre, il n'y a

guère moyen de tirer parti de ses méthodes embrouillées. Les lettres, dont il fait usage, ont une apparence scientifique; mais elles ne donnent que des cas très-particuliers de formules plus générales, et surtout de la théorie des tableaux, théorie qui est elle-même très-bornée, ainsi que le prouve le présent traité. Sauveur a donc bien peu contribué au nouveau genre de combinaisons dont on va s'occuper.

Si l'on divise les faces d'un cube comme on l'a pratiqué pour les carrés, et si l'on fait passer des plans par les lignes de division, parallèlement à ces faces, on aura les tranches, les bandes et les cellules du cube.

La propriété des cubes magiques consiste à avoir une même somme dans toutes les tranches, même dans les tranches diagonales. Il est toujours facile de déterminer le nombre de ces tranches. Soit r la racine: elle est égale au nombre de cases contenues dans l'une des bandes d'une face; on aura $3r$ pour le nombre des tranches parallèles aux faces; les tranches diagonales sont toujours au nombre de 6: ainsi la totalité des tranches sera $3r+6=3(r+2)$. Les bandes sont au nombre de $3r^2$: car les bandes des tranches diagonales sont comprises parmi celles qui composent les tranches parallèles aux faces. Le nombre des cases ou cellules est r^3.

On voit un cube (*figure* 316, *planche* XLV). Les lignes pleines, avec deux des lignes ponctuées, déterminent les faces parallèles, et un plan diagonal.

Pour fixer les idées, on appellera plan des X celui qui comprendra les unités simples de la racine; plan des Y celui qui contiendra les multiples de cette racine, multiples

dont 0 fait toujours partie; enfin plan des Z celui où se trouvent les multiples des carrés de la racine, et dont 0 fait aussi nécessairement partie. On désignera par tranches des X, Y, Z, celles qui sont renfermées entre des plans parallèles à ceux des X, Y, Z. La première tranche sera toujours celle qui sera terminée par l'un des plans X, Y, Z, les autres suivront par ordre. La première bande d'une tranche est celle qui est limitée dans sa longueur par deux des plans des X, Y, Z. La première case d'une bande est celle qui a pour l'une de ses arêtes partie de l'intersection de deux des plans X, Y, Z. Quant aux premières bandes des premières tranches, la première case est à l'angle des intersections des 3 plans, et les suivantes ont une des 3 arêtes des plans pour une des leurs.

Pour les plans diagonaux, on appellera plan diagonal des X celui qui coupe diagonalement ce plan des X, et ainsi des autres. Le premier de deux plans diagonaux de même dénomination est celui qui passe par l'intersection de droite ou supérieure de deux plans; dans les figures c'est le plan qui passe par l'intersection marquée de deux autres plans.

Le cube est plus exact (*figure* 217), puisque les côtés sont égaux; mais on préfèrera la forme de la figure 316, attendu qu'il y a plus de facilité pour placer les multiples, l'intervalle des lignes de deux des plans étant moins resserré.

Il est clair que, pour avoir tous les nombres qui doivent remplir les cellules d'un cube, (on suppose la progression arithmétique des nombres naturels, à commencer par l'unité. S'il en était autrement, il y aurait à substituer dans les carrés les nombres répondant à ceux de la suite naturelle), la racine étant *r*; il faut un tableau contenant les

multiples, depuis 0 jusqu'à $r\,(r-1)$, ce qui donnera par addition tous les nombres de 1 à r^2; le 1.er tableau renfermant tous les nombres de 1 à r. Il faut de plus un 3.e tableau renfermant les multiples du carré de la racine, depuis 0 jusqu'à $r^2\,(r-1)$. En effet, pour 0, multiple de ce 3.e tableau, on aura, comme dessus, tous les nombres de 1 à r^2; pour le multiple r^2 du carré de la racine, il viendra r^2+1, r^2+2, $r^2+3\ldots 2r^2$; pour le multiple $2r^2$, on aura $2r^2+1$, $2r^2+2\ldots 3r^2$, et ainsi de suite, jusqu'au multiple $r^2(r-1)=r^3-r^2$, ce qui donnera r^3-r^2+1, $r^3-r^2+2\ldots$ $r^3-r^2+r^2=r^3$.

Il ne s'agit plus que de disposer les tableaux de manière à éviter des répétitions de nombres. Voici un exemple sur le carré de 5, le seul qu'ait donné Sauveur. Ce carré impair a un terme moyen. On emploiera des lettres : ainsi A, B, C, D, M, seront les nombres simples, M le moyen; *a*, *b*, *c*, *d*, *m*, représenteront les multiples, *m* étant le moyen; l'un des multiples *a*, *b*, *c*, *d*, sera $=0$: enfin, au lieu des multiples du carré de la racine, on choisira les lettres α, β, γ, δ, μ, ce dernier étant le moyen, et l'un des autres multiples étant aussi 0. On peut mettre les moyens en diagonale, de manière cependant que les trois moyens ne concourent pas à la même case d'angle du cube.

La première tranche des X est $m\ \alpha\ \mu$; la seconde, $d\ \beta\ \alpha$; la dernière, $a\ \mu\ \delta$. La première tranche des Y est M $\alpha\ \mu$; la seconde, D $\beta\ \alpha$; la dernière, A $\mu\ \delta$. La première des Z est M $d\ m$; la seconde, D $c\ d$; la dernière, A $m\ a$. La première bande de la première tranche des X est M $m\ \alpha$; et, pour la distinguer d'une bande des Y ou d'une bande diagonale, on peut mettre devant la bande

la lettre qui désigne les plans : ainsi on peut écrire ici X. $M\,m\,\alpha$. La case $C\,c\,\alpha$ est la 2.e de cette bande. Les cases ou cellules se distinguent toujours par trois lettres ou trois nombres, lesquels, par leur addition, donnent celui qui convient à cette case.

Il faut se familiariser avec la transposition des lettres ou des nombres, puisqu'il en faut trois pour former celui d'une cellule. On conservera ce dernier mot pour désigner les cases d'un cube ; celui de case sera réservé pour les plans.

Revenant à la figure 318,

La 1.re tranche des Y est composée de 5 bandes, savoir :

$M\,m\,\alpha \ldots A\,a\,\alpha \ldots B\,b\,\alpha \ldots C\,c\,\alpha \ldots D\,d\,\alpha$ } Cases de la 1.re bande de Y.

$M\,d\,\beta \ldots A\,m\,\beta \ldots B\,a\,\beta \ldots C\,b\,\beta \ldots D\,c\,\beta$ } Cases de la 2.e bande de Y.

$M\,c\,\gamma \ldots A\,d\,\gamma \ldots B\,m\,\gamma \ldots C\,a\,\gamma \ldots D\,b\,\gamma$ } Cases de la 3.e bande de Y.

$M\,b\,\delta \ldots A\,c\,\delta \ldots B\,d\,\delta \ldots C\,m\,\delta \ldots D\,a\,\delta$ } Cases de la 4.e bande de Y.

$M\,a\,\mu \ldots A\,b\,\mu \ldots B\,c\,\mu \ldots C\,d\,\mu \ldots D\,m\,\mu$ } Cases de la 5.e bande de Y.

Les trois lettres dont le concours doit, par addition, former une cellule, devraient être jointes par le signe $+$; c'est par abréviation que ce signe est supprimé.

La somme des lettres pour cette tranche, est $5\,A+5\,B+5\,C+5\,D+5\,M \ldots\ldots +5\,a+5\,b+5\,c+5\,d+5\,m \ldots\ldots +5\,\alpha+5\,\beta+5\,\gamma+5\,\delta+5\,\mu=5(A+B+C+D+M+a+b+c+d+m+\alpha+\beta+\gamma+\delta+\mu)$. Il faut donc que les autres tranches aient la même valeur. Cette valeur en nombres

est égale au 5.e de la somme des 125 premiers nombres, ou de $\frac{126 \cdot 125}{2 \cdot 5} = 63 \cdot 25 = 1575$. En effet $A+B+C+D+M = 1, 2, 3, 4, 5 = 15$. De même $0, 5, 10, 15, 20 = 50$. Enfin $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \mu = 0, 25, 50, 75, 100 = 250$. Mais la somme $15+50+250 = 315$, et $315 \cdot 5 = 1575$. Qu'on vérifie, par exemple, la 4.e tranche des Z, laquelle est B a b : on aura, pour les cases de chacune des 5 bandes de cette tranche, les valeurs suivantes :

A a α...	M a β...	D a γ...	C a δ...	B a μ	1.re bande.
A m β...	M m γ...	D m δ...	C m γ...	B m δ	2.e bande.
A d γ...	M d δ...	D d μ...	C d α...	B d β	3.e bande.
A c δ...	M c μ...	D c α...	C c β...	B c γ	4.e bande.
A b μ...	M b α...	D b β...	C b γ...	B b δ	5.e bande.

On voit qu'il viendra la même somme que ci-devant.

Qu'on examine encore une tranche diagonale, la 2.e de Z par exemple, qui est celle qui traverse les cases où sont $\mu\mu\mu\mu\mu$; il viendra :

M a μ...	A b μ...	B c μ...	C d μ...	D m μ	1.re bande.
D b μ...	M c μ...	A d μ...	B m μ...	C a μ	2.e bande.
C c μ...	D d μ...	M m μ...	A a μ...	B b μ	3.e bande.
B d μ...	C m μ...	D a μ...	M b μ...	A c μ	4.e bande.
A m μ...	B a μ...	C b μ...	D c μ...	M d μ	5.e bande.

La somme est ici $5(A+B+C+D+M+a+b+c+d+m)+25\mu$; mais, comme μ est le moyen de la progression $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \delta \cdot \mu$, et que par conséquent $25\mu = 5(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\mu)$, on aura encore même somme que ci-devant. On verra plus loin que ces tranches diagonales se déduisent aisément des autres tranches parallèles aux plans des X, Y, Z.

ARTICLE PREMIER.

CUBE DE 3.

On va examiner les différentes tranches du cube de 3. On sait que les tableaux, pour le carré de 3, ont le moyen en diagonale. Les bandes d'une tranche peuvent se prendre de deux manières, selon qu'elles sont parallèles à l'une des deux intersections; mais la somme des nombres de la même tranche demeure la même.

Le cube de 3 est 27; la somme des nombres de 1 à 27 $=\frac{28 \cdot 27}{2}$; le tiers, pour une tranche, sera $\frac{28 \cdot 27}{2 \cdot 3}=14 \cdot 9=126$: il faut donc qu'on ait 126 pour valeur de chaque tranche. Ayant ainsi fait les tableaux comme on le voit (*fig.* 319), et prenant les bandes parallèlement à l'intersection des X, Y, on aura pour les tranches parallèles aux Y, c'est-à-dire au plan des Y, les nombres suivans:

23 27 19... 2 6 7...17 12 13	1.re tranche = 126
4 8 3...10 14 18...25 20 24	2.e tranche = 126
15 16 11...21 22 26... 9 1 5	3.e tranche = 126

Les tranches parallèles aux Z, les bandes étant prises parallèlement à l'intersection des plans Y, Z, sont

19 7 13... 3 18 24...11 26 5	1.re tranche = 126
27 6 12... 8 14 20...16 22 1	2.e tranche = 126
23 2 17... 4 10 25...15 21 9	3.e tranche = 126

On voit que les bandes de ces tranches se tirent des précédentes, en prenant dans chacune de celles-ci des nombres semblablement placés : ainsi les trois nombres 19, 7, 13, sont une des bandes de la 1.re tranche. Il en

est de même de 3, 18, 24, et de 11, 26, 5. Et ainsi de suite pour les deux autres tranches.

Les tranches parallèles aux X, ayant pris les bandes parallèlement à l'intersection des X, Y, sont

23 27 19...	4	8	3...	15	16	11	1.re tranche=126
2 6 7...	10	14	18...	21	22	26	2.e tranche=126
17 12 13...	25	20	24...	9	1	5	3.e tranche=126

Ces tranches se déduisent encore des premières, en prenant de chacune d'elles des bandes semblablement placées : ainsi les trois premières bandes de chacune des tranches forment une tranche.

Voici les tranches des diagonales :

23 27 19... 10 14 18... 21 22 26 1re diag. des Z=126
17 12 13... 10 14 18... 15 16 11 2.e diag. des Z=126

On voit que ces tranches se tirent facilement encore de celles parallèles aux plans, par exemple des dernières, en prenant les bandes diagonalement. Il est à remarquer que les deux diagonales ont une bande commune.

Tranches des diagonales des X :

19 7 13... 8 14 20... 15 21 9 1re diag. des X=126
23 2 17... 8 14 20... 11 26 5 2.e diag. des X=126

Celles-ci se déduisent aisément de celles parallèles aux Z.

Tranches des diagonales des Y :

19 3 11... 6 14 22... 17 25 9 1.re diag. des Y=126
23 4 15... 6 14 22... 13 24 5 2.e diag. des Y=126

Ces dernières tranches peuvent toujours se déduire de celles parallèles aux plans; il ne faut qu'un peu d'attention pour obtenir ces dérivations.

ARTICLE II.

CUBE DE 5.

Le cube de 5 (*figure* 320, *planche* XLVI) n'a point de moyen en diagonale. Voici les tranches Y parallèles à l'intersection X Y.

Le cube de 5 est 125. La somme des 125 premiers nombres est $\frac{126 \cdot 125}{2}$, dont le 5.e est $\frac{126 \cdot 125}{2 \cdot 5} = 63 \cdot 25 = 1575$.

15	24	8	17	1	= 65	
45	29	38	47	31	= 190	
75	59	68	52	61	= 315	1.re tranche Y = 1575
80	89	98	82	91	= 440	
110	119	103	112	121	= 565	

88	97	81	95	79	= 440	
118	102	111	125	109	= 565	
23	7	16	5	14	= 65	2.e tranche Y = 1575
28	37	46	35	44	= 190	
58	67	51	65	74	= 315	

36	50	34	43	27	= 190	
66	55	64	73	57	= 315	
96	85	94	78	87	= 440	3.e tranche Y = 1575
101	115	124	108	117	= 565	
6	20	4	13	22	= 65	

114	123	107	116	105	= 565	
19	3	12	21	10	= 65	
49	33	42	26	40	= 190	4.e tranche Y = 1575
54	63	72	56	70	= 315	
84	93	77	86	100	= 440	

62	71	60	69	53 = 315	5.e tranche Y = 1575
92	76	90	99	83 = 440	
122	106	120	104	113 = 565	
2	11	25	9	18 = 65	
32	41	30	39	48 = 190	

On remarque que les tranches sont composées de bandes qui ont chacune une valeur différente, mais qui se répète à chaque tranche : ici ces valeurs sont 65, 190, 315, 440, 565.

Voici les tranches des Z; les bandes sont parallèles à l'intersection Y Z.

1	31	61	91	121 = 305	1.re tranche des Z = 1575
79	109	14	44	74 = 320	
27	57	87	117	22 = 310	
105	10	40	70	100 = 325	
53	83	113	18	48 = 315	

17	47	52	82	112 = 310	2.e tranche des Z = 1575
95	125	5	35	65 = 325	
43	73	78	108	13 = 315	
116	21	26	56	86 = 305	
69	99	104	9	39 = 320	

8	38	68	98	103 = 315	3.e tranche des Z = 1575
81	111	16	46	51 = 305	
34	64	94	124	4 = 320	
107	12	42	72	77 = 310	
60	90	120	25	30 = 325	

24	29	59	89	119	= 320	
97	102	7	37	67	= 310	
50	55	85	115	20	= 325	4.e tranche des Z = 1575
123	3	33	63	93	= 315	
71	76	106	11	41	= 305	

15	45	75	80	110	= 325	
88	118	23	28	58	= 315	
36	66	96	101	6	= 305	5.e tranche des Z = 1575
114	19	49	54	84	= 320	
62	92	122	2	32	= 310	

On voit que ces tranches se déduisent des premières, en prenant les verticales de même rang dans chacune de celles-ci pour former les horizontales de celles-là.

Passant aux tranches des X, les bandes étant prises parallèlement à l'intersection X Y.

15	24	8	17	1	= 65	
88	97	81	95	79	= 440	
36	50	34	43	27	= 190	1.re tranche des X = 1575
114	123	107	116	105	= 565	
62	71	60	69	53	= 315	

45	29	38	47	31	= 190	
118	102	111	125	109	= 565	
66	55	64	73	57	= 315	2.e tranche des X = 1575
19	3	12	21	10	= 65	
92	76	90	99	83	= 440	

75	59	68	52	61	= 315	3.e tranche des X = 1575
23	7	16	5	14	= 65	
96	85	94	78	87	= 440	
49	33	42	26	40	= 190	
122	106	120	104	113	= 565	

80	89	98	82	91	= 440	4.e tranche des X = 1575
28	37	46	35	44	= 190	
101	115	124	108	117	= 565	
54	63	72	56	70	= 315	
2	11	25	9	18	= 65	

110	119	103	112	121	= 565	5.e tranche des X = 1575
58	67	51	65	74	= 315	
6	20	4	13	22	= 65	
84	93	77	86	100	= 440	
32	41	30	39	48	= 190	

Les tranches des X se déduisent encore de celles des Y, en prenant des horizontales de même rang dans chacune de celles-ci pour former celles des X.

Si l'on veut connaître aussi les tranches diagonales, on verra qu'elles se tirent de celles parallèles aux plans, comme suit :

1	31	61	91	121	= 305	1.re tranche diagonale des X = 1575
95	125	5	35	65	= 325	
34	64	94	124	4	= 320	
123	3	33	63	93	= 315	
62	92	122	2	32	= 310	

53	83	113	18	48 = 315		2.e tranche diagonale des X=1575
116	21	26	56	86 = 305		
34	64	94	124	4 = 320		
97	102	7	37	67 = 310		
15	45	75	80	110 = 325		

15	24	8	17	1 = 65	1.re tranche diagonale des Z=1575
118	102	111	125	109 = 565	
96	85	94	78	87 = 440	
54	63	72	56	70 = 315	
32	41	30	39	48 = 190	

110	119	103	112	121 = 565	2.e tranche diagonale des Z=1575
28	37	46	35	44 = 190	
96	85	94	78	87 = 440	
19	3	12	21	10 = 65	
62	71	60	69	53 = 315	

1	79	27	105	53 = 265	1.re tranche diagonale des Y =1575
47	125	73	21	99 = 365	
68	16	94	42	120 = 340	
89	37	115	63	11 = 315	
110	58	6	84	32 = 290	

121	74	22	100	48 = 365	2.e tranche diagonale des Y=1575
82	35	108	56	9 = 290	
68	16	94	42	120 = 340	
29	102	55	3	76 = 265	
15	88	36	114	62 = 315	

Les diagonales des X se tirent des horizontales des Z ; les diagonales des Z se déduisent des horizontales des Y : les unes et les autres en prenant la 1.re horizontale de la 1.re tranche, la 2.e de la 2.e tranche, et ainsi de suite. Quant aux diagonales des Y, elles se trouvent en prenant la 1.re verticale de la 1.re tranche des Z, la 2.e verticale de la 2.e tranche, etc.

Ce qu'il y a à éviter lors du placement des nombres dans les faces du cube, c'est la répétition que pourrait donner l'addition de mêmes nombres dans le carré. Ainsi, dans la figure 320, laissant fixes les nombres des plans Y et Z, on ne pourrait mettre, dans celui des X, le moyen à la 1.re diagonale, mais bien à la 2.e. On entendra par 1.re diagonale d'un plan celle qui part de l'intersection des trois plans. Si l'on commence de la même manière les secondes lignes des tableaux des faces Y, Z, celle des X pourra avoir la 1.re diagonale avec le moyen répété, mais il ne pourrait se trouver à la seconde.

ARTICLE III.

CUBE DE 7.

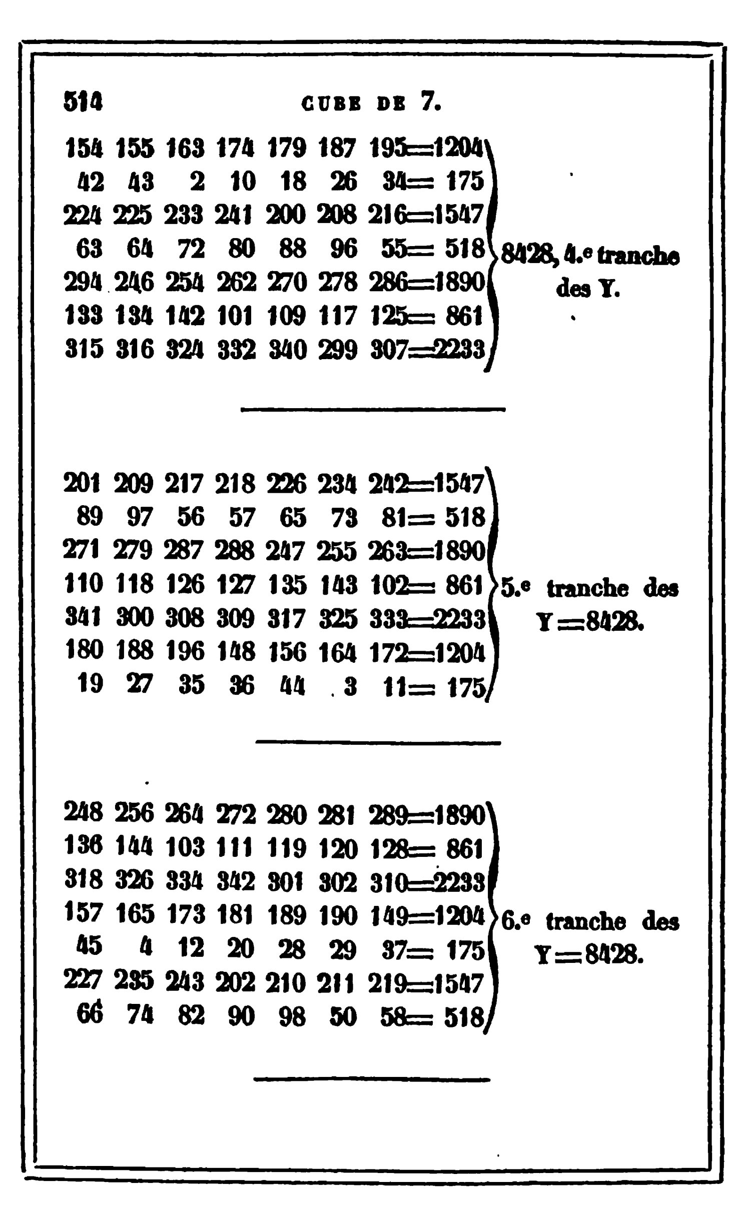
Les faces du cube (*figure* 321, *planche* XLVI) sont arrangées d'après les méthodes connues, mais les secondes lignes commencent par des nombres d'ordre différent, pris dans les premières. La face des X est la supérieure, ce qui est très-indifférent. La somme des 343 premiers nombres est $\frac{344 \cdot 343}{2}$, dont le 7.e, pour chaque tranche, est $\frac{344 \cdot 343}{2 \cdot 7} = 172 \cdot 49 = 8428$.

Voici les tranches des Y, prises pour les bandes, parallèlement à l'intersection des X Y.

6	14	15	23	31	39	47=	175	8428, 1.re tranch. des Y.
237	245	197	205	213	221	229=	1547	
76	84	85	93	52	60	68=	518	
258	266	267	275	283	291	250=	1890	
146	105	106	114	122	130	138=	861	
328	336	337	296	304	312	320=	2233	
167	175	176	184	192	151	159=	1204	

53	61	69	77	78	86	94=	518	8428, 2.e tranche des Y.
284	292	251	259	260	268	276=	1890	
123	131	139	147	99	107	115=	861	
305	313	321	329	330	338	297=	2233	
193	152	160	168	169	177	185=	1204	
32	40	48	7	8	16	24=	175	
214	222	230	238	239	198	206=	1547	

100	108	116	124	132	140	141=	861	8428, 3.e tranche des Y.
331	339	298	306	314	322	323=	2233	
170	178	186	194	153	161	162=	1204	
9	17	25	33	41	49	1=	175	
240	199	207	215	223	231	232=	1547	
79	87	95	54	62	70	71=	518	
261	269	277	285	293	252	253=	1890	



154	155	163	174	179	187	195	=1204	
42	43	2	10	18	26	34	= 175	
224	225	233	241	200	208	216	=1547	
63	64	72	80	88	96	55	= 518	8428, 4.e tranche des Y.
294	246	254	262	270	278	286	=1890	
133	134	142	101	109	117	125	= 861	
315	316	324	332	340	299	307	=2233	

201	209	217	218	226	234	242	=1547	
89	97	56	57	65	73	81	= 518	
271	279	287	288	247	255	263	=1890	
110	118	126	127	135	143	102	= 861	5.e tranche des Y=8428.
341	300	308	309	317	325	333	=2233	
180	188	196	148	156	164	172	=1204	
19	27	35	36	44	3	11	= 175	

248	256	264	272	280	281	289	=1890	
136	144	103	111	119	120	128	= 861	
318	326	334	342	301	302	310	=2233	
157	165	173	181	189	190	149	=1204	6.e tranche des Y=8428.
45	4	12	20	28	29	37	= 175	
227	235	243	202	210	211	219	=1547	
66	74	82	90	98	50	58	= 518	

295	303	311	319	327	335	343=2233	7.e tranche des Y=8428.
183	191	150	158	166	174	182=1204	
22	30	38	46	5	13	21= 175	
204	212	220	228	236	244	203=1547	
92	51	59	67	75	83	91= 518	
274	282	290	249	257	265	273=1890	
113	121	129	137	145	104	112= 861	

Chaque tranche est composée de sept nombres égaux, qui sont la somme des sept cellules de chaque bande. L'ordre dans lequel reviennent ces nombres est constant : une tranche commence par le 3.e nombre de la précédente, et les bandes conservent alors le même ordre. Cette remarque est importante; mais il ne s'ensuit pas que les tranches des parallèles aux trois plans aient les mêmes bandes : ces bandes ne sont répétées qu'autant qu'elles appartiennent aux parallèles à un même plan; elles peuvent l'être aussi, quoique faisant partie d'autres parallèles.

On se contentera de rechercher une tranche des X et une des Z, ainsi que les tranches diagonales.

Pour une tranche des X, les bandes étant parallèles à l'intersection des X Y :

76	84	85	93	52	60	68= 518	8428, 3.e tranche des X.
123	131	139	147	99	107	115= 861	
170	178	186	194	153	161	162=1204	
224	225	233	241	200	208	216=1547	
271	279	287	288	247	255	263=1890	
318	326	334	342	301	302	310=2233	
22	30	38	46	5	13	21= 175	

Les bandes sont celles du 3.e rang de chacune des tranches des Y.

Pour une tranche des Z, les bandes étant parallèles à l'intersection Y Z :

15	197	85	267	106	337	176=1183	
69	251	139	321	160	48	230=1218	
116	298	186	25	207	95	277=1204	
163	2	233	72	254	142	324=1190	8428, 5.e tranche des Z.
217	56	287	126	308	196	35=1225	
264	103	334	173	12	243	82=1211	
311	150	38	220	59	290	129=1197	

Les bandes sont les 3.es verticales de chaque tranche des Y.

Venant aux diagonales, voici les tranches diagonales des Y :

47	94	141	195	242	289	343=1351	
221	268	322	26	73	120	174=1204	
52	99	153	200	247	301	5=1057	
275	329	33	80	127	181	228=1253	8428, 1re tranche diagonale des Y.
106	160	207	254	308	12	59=1106	
336	40	87	134	188	235	282=1302	
167	214	261	315	19	66	113=1155	

Cette tranche diagonale se déduit encore en composant sa 1.re verticale de la 2.e diagonale de la 1.re tranche de Y; sa 2.e verticale, de la 2.e diagonale de la 2.e tranche de Y, et ainsi de suite; ou, si l'on aime mieux, la 1.re bande ci-dessus se compose des derniers nombres des premières bandes de chaque tranche de Y; la 2.e bande aura les pé-

nultièmes nombres des secondes bandes de ces tranches; la 3.e se formera des antépénultièmes nombres des troisièmes bandes, et ainsi de suite.

6	53	100	154	201	248	295=1057	
245	292	339	43	97	144	191=1351	
85	139	186	233	287	334	38=1302	
275	329	33	80	127	181	228=1253	8428, 2.e tranche
122	169	223	270	317	28	75=1204	diagonale des Y.
312	16	70	117	164	211	265=1155	
159	206	253	307	11	58	112=1106	

Ici chaque verticale est tirée de la 1.re diagonale de chacune des tranches de Y.

Voici les tranches diagonales des Z :

6	14	15	23	31	39	47= 175	
284	292	251	259	260	268	276=1890	
170	178	186	194	153	161	162=1204	
63	64	72	80	88	96	55= 518	8428, 1re tranche
341	300	308	309	317	325	333=2233	diagonale des Z.
227	235	243	202	210	211	219=1547	
113	121	129	137	145	104	112= 861	

Les bandes de cette diagonale se tirent encore des tranches des Y : la première bande est la première de la première tranche; la seconde bande est la deuxième de la deuxième tranche; la troisième bande est la troisième de la troisième tranche, et ainsi de suite.

295	303	311	319	327	335	343	=2233	
136	144	103	111	119	120	128	= 861	
271	279	287	288	247	255	263	=1890	
63	64	72	80	88	96	55	= 518	8428, 2.e tranche diagonale des Z.
240	199	207	215	223	231	232	=1547	
32	40	48	7	8	16	24	= 175	
167	175	176	184	192	151	159	=1204	

On voit ici cette 2.e tranche diagonale composée des bandes des tranches des Y, savoir : la première bande prise de la première de la dernière tranche des Y; la seconde de la seconde de la pénultième tranche, et ainsi de suite. Il est clair que ces bandes conservent les mêmes sommes que celles des bandes de Y. Il n'en était pas ainsi pour les tranches diagonales de Y, parce qu'on les avait tirées de diagonales, et que les sommes ont dû changer, mais le résultat était toujours 8428.

Enfin, les tranches diagonales des X donneront :

47	229	68	250	138	320	159	=1204	
86	268	107	338	177	16	198	=1190	
132	314	153	41	223	62	293	=1218	
171	10	241	80	262	101	332	=1197	8428, 1re tranche diagonale des X.
217	56	287	126	308	196	35	=1225	
256	144	326	165	4	235	74	=1204	
295	183	22	204	92	274	113	=1183	

Cette tranche se tire toujours de celles des Y : la 1.re bande est la dernière verticale de la 1.re tranche; la 2.e bande est l'avant-dernière verticale de la 2.e tranche, et ainsi de suite jusqu'à la dernière bande, qui est la 1.re verticale de la dernière tranche.

343	182	21	203	91	273	112=1225		
281	120	302	190	29	211	50=1183		
226	65	247	135	317	156	44=1190		
171	10	241	80	262	101	332=1197	8428, 2.e tranche diagonale des X.	
116	298	186	25	207	95	277=1204		
61	292	131	313	152	40	222=1211		
6	237	76	258	146	328	167=1218		

Cette diagonale se déduit des mêmes tranches des Y, mais en sens contraire : la 1.re bande est la dernière verticale de la dernière tranche ; la seconde est l'avant-dernière verticale de la pénultième tranche, et ainsi de suite jusqu'à la dernière bande, qui est la 1.re verticale de la 1.re bande. On voit qu'il y a toujours une bande commune aux deux diagonales d'une même face.

On s'est étendu sur cet exemple afin de montrer comment les bandes dérivaient de tranches connues.

Comme il y a deux manières de former les bandes, suivant qu'on les prend parallèles à l'une ou à l'autre des intersections, on peut avoir aussi plusieurs manières de déduire les tranches des autres faces sans être obligé de les calculer.

ARTICLE IV.

CUBE DE 9 ET DES IMPAIRS COMPOSÉS.

Lorsqu'un nombre est premier, on vient de voir qu'il est facile d'obtenir le cube, soit qu'on ait placé les moyens aux trois diagonales ou à deux seulement, ou enfin qu'il n'y ait pas de moyen en diagonale.

Si le nombre est un carré, il y aura des séries répétées

en verticale ou en diagonale : ainsi, pour 9, il y aura le terme moyen à la première ou seconde diagonale, en commençant la deuxième ligne par le dernier ou le deuxième terme de la 1.re horizontale. On aura série de 3 nombres si la 2.e ligne commence par le 3.e ou le 8.e nombre de la 1.re; on aura encore séries à la 1.re ou 2.e diagonale si la 2.e ligne commence par le 6.e ou le 5.e nombre de la 1.re; mais les séries seront en verticale si la 2.e ligne commence par le 4.e ou le 7.e nombre. Ainsi, pour la racine 9, on aura, dans tous les cas, des nombres répétés à l'une des lignes diagonales, ou à toutes les verticales. Mais il n'en serait pas de même pour d'autres carrés impairs : ainsi, pour la racine 25, il n'y aura pas de séries répétées si la 2.e ligne commence par les 3.e et 24.e nombres de la 1.re, par les 4.e et 23.e, par les 8.e et 19.e, par les 9.e et 18.e, enfin par les 13.e et 14.e. On aura le moyen en diagonale 1.re ou 2.e si la 2.e ligne commence par le dernier ou le 2.e nombre de la 1.re horizontale; séries répétées à la 1.re diagonale si l'on commence la 2.e ligne par les 5.e, 20.e, 10.e et 15.e nombres de la 1.re; séries répétées en 2.e diagonale, en prenant pour 1.er nombre de la 2.e horizontale les 22.e, 7.e, 17.e et 12.e nombres de la 1.re; enfin les séries seront répétées à toutes les verticales si la 2.e ligne commence par les 6.e, 21.e, 11.e et 16.e nombres de la 1.re.

Il ne faut que deux nombres pour déterminer ces séries. Ainsi, prenant

1..... 25	1...... 25	1...... 25
7 8...5 6	11 12...9 10	19 20...17 18

On voit, dans le premier cas, série en 2.e diagonale;

dans le second, série en verticale; dans le troisième, aucune série. Il suffit, pour qu'il y ait série, que la différence entre deux nombres verticaux se suivant immédiatement, ou deux nombres diagonaux se suivant également, donne pour résultat la racine ou un multiple de la racine d'un tableau. Les nombres ci-dessus doivent être considérés comme désignant l'ordre de ceux de la 1.re horizontale : car ils pourraient être très-différens de ceux de la série naturelle commençant par l'unité.

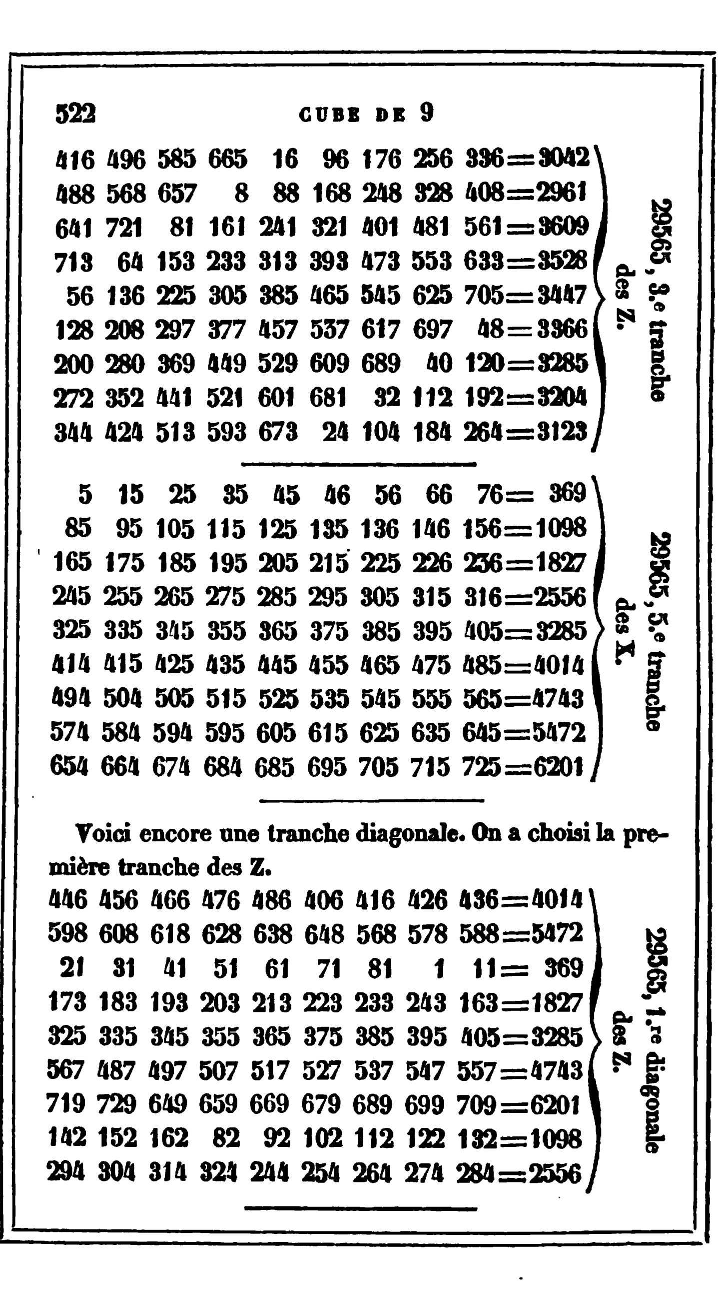
Revenant au cube de 9 (*figure* 322, *planche* XLVI), les moyens sont en diagonale. La somme des 729 premiers nombres $=\frac{730 \cdot 729}{2}$**, dont le 9.e pour chaque tranche est** $\frac{730 \cdot 729}{2 \cdot 9}=365 \cdot 81=29565.$

Sauf le moyen, les huit autres nombres suivront l'ordre qu'on voudra.

Voici quelques tranches du cube de 9 :

526	536	546	556	566	495	496	506	516	= 4743
598	608	618	628	638	648	568	578	588	= 5472
670	680	690	700	710	720	721	650	660	= 6201
13	23	33	43	53	63	64	74	3	= 369
85	95	105	115	125	135	136	146	156	= 1098
238	167	177	187	197	207	208	218	228	= 1827
310	320	249	259	269	279	280	290	300	= 2556
382	392	402	331	341	351	352	362	372	= 3285
454	464	474	484	413	423	424	434	444	= 4014

29565, 2.e tranche des Y.



416	496	585	665	16	96	176	256	336	= 3042
488	568	657	8	88	168	248	328	408	= 2961
641	721	81	161	241	321	401	481	561	= 3609
713	64	153	233	313	393	473	553	633	= 3528
56	136	225	305	385	465	545	625	705	= 3447
128	208	297	377	457	537	617	697	48	= 3366
200	280	369	449	529	609	689	40	120	= 3285
272	352	441	521	601	681	32	112	192	= 3204
344	424	513	593	673	24	104	184	264	= 3123

29565, 3.e tranche des Z.

5	15	25	35	45	46	56	66	76	= 369
85	95	105	115	125	135	136	146	156	= 1098
165	175	185	195	205	215	225	226	236	= 1827
245	255	265	275	285	295	305	315	316	= 2556
325	335	345	355	365	375	385	395	405	= 3285
414	415	425	435	445	455	465	475	485	= 4014
494	504	505	515	525	535	545	555	565	= 4743
574	584	594	595	605	615	625	635	645	= 5472
654	664	674	684	685	695	705	715	725	= 6201

29565, 5.e tranche des X.

Voici encore une tranche diagonale. On a choisi la première tranche des Z.

446	456	466	476	486	406	416	426	436	= 4014
598	608	618	628	638	648	568	578	588	= 5472
21	31	41	51	61	71	81	1	11	= 369
173	183	193	203	213	223	233	243	163	= 1827
325	335	345	355	365	375	385	395	405	= 3285
567	487	497	507	517	527	537	547	557	= 4743
719	729	649	659	669	679	689	699	709	= 6201
142	152	162	82	92	102	112	122	132	= 1098
294	304	314	324	244	254	264	274	284	= 2556

29565, 1.re diagonale des Z.

Il n'est nullement nécessaire que les moyens soient en diagonale, ainsi qu'on l'a déjà dit. Il faut alors que les trois nombres d'une série aient dans chaque face le tiers de la somme des *r* moyens, ou, ce qui est la même chose, que chaque série vaille trois moyens. Il faut éviter que les séries aboutissent au même angle.

Il est commode, pour vérifier qu'il n'y a point de nombres répétés, d'employer les nombres naturels dans les différentes faces, au lieu des multiples. Dans l'une ils désignent les nombres simples, dans une autre ceux des multiples de la racine, et dans la troisième ceux des multiples du carré de la racine. Il est même inutile de construire le cube; les tableaux suffisent pour faire la vérification : on en déduit facilement les tranches et les bandes. On va les donner pour le cas de séries en diagonales et en verticales dans les trois faces. On montrera ensuite comment on peut vérifier les résultats. On suppose ici que dans le plan des X la série est dans la 1.re diagonale, qu'elle est en verticale dans celui des Y, et à la 2.e diagonale dans le plan des Z. Voici les tableaux :

FACE DES Y.	FACE DES X.	FACE DES Z.
2 1 3 6 5 4 7 9 8	3 2 1 4 5 6 8 7 9	2 3 1 4 6 5 7 8 9
7 9 8 2 1 3 6 5 4	6 8 7 9 3 2 1 4 5	6 5 7 8 9 2 3 1 4
6 5 4 7 9 8 2 1 3	2 1 4 5 6 8 7 9 3	9 2 3 1 4 6 5 7 8
2 1 3 6 5 4 7 9 8	8 7 9 3 2 1 4 5 6	4 6 5 7 8 9 2 3 1
7 9 8 2 1 3 6 5 4	1 4 5 6 8 7 9 3 2	8 9 2 3 1 4 6 5 7
6 5 4 7 9 8 2 1 3	7 9 3 2 1 4 5 6 8	1 4 6 5 7 8 9 2 3
2 1 3 6 5 4 7 9 8	4 5 6 8 7 9 3 2 1	7 8 9 2 3 1 4 6 5
7 9 8 2 1 3 6 5 4	9 3 2 1 4 5 6 8 7	3 1 4 6 5 7 8 9 2
6 5 4 7 9 8 2 1 3	5 6 8 7 9 3 2 1 4	5 7 8 9 2 3 1 4 6

Le plan supérieur sera celui des Y; le plan à forme carrée, celui des X. La dernière horizontale du plan des Y est ici supposée près l'intersection des XY; le plan des X a la 1.re horizontale de son tableau près la même intersection; enfin la première du plan des Z est la première de son tableau, près l'intersection des YZ. On suppose également que les nombres des faces des Y et des Z désignent les multiples par ordre : ainsi 7 désigne le 7.e multiple de la racine, le premier étant 0; le même nombre désigne aussi le 7.e multiple des carrés, dont le premier est aussi 0 : ainsi le 7.e multiple n'est que le 6.e effectif ou $6 \cdot 9 = 54$ pour les multiples de la racine, et $6 \cdot 81 = 486$ pour ceux du carré de cette racine. On obtiendra donc la première tranche parallèle au plan des X, comme suit :

La première bande, en prenant le premier nombre de la 1.re horizontale des Z, lequel est commun à *toute la* bande; ensuite le premier de la dernière horizontale des Y, et le premier de la 1.re horizontale des X; puis le deuxième de la même horizontale des Y, et le deuxième de la 1.re horizontale des X; et de même en continuant jusqu'aux derniers de cette même horizontale des X et des Y.

La deuxième bande s'obtiendra en prenant le premier nombre de la 2.e horizontale des Z communs; puis toujours, et dans le même ordre, les nombres de la dernière horizontale des Y pour toute la tranche, et la 2.e horizontale des X à commencer par le premier nombre.

La troisième bande se formera avec le premier nombre de la 3.e horizontale des Z, qui est commun; et la 3.e horizontale des X, toujours avec la dernière des Y.

Lorsqu'on aura épuisé ainsi la 1.re verticale des Z, on

viendra à la seconde combinée avec l'avant-dernière des Y, qui servira pour toute la tranche, et toutes celles des X, ce qui donnera la deuxième tranche. Il est facile de continuer, et l'on aura 3 nombres pour chaque case, dont le premier désignera les multiples du carré de la racine; le second, les multiples de cette racine; et le troisième, ses nombres simples.

Il est bon de remarquer que, les verticales ayant série, il faut que les neuf nombres qui entrent dans le tableau où sont ces verticales, se partagent en trois parties, dont chacune soit $=15$: ainsi l'on a ici 2, 7, 6... 1, 9, 5... 3, 8, 4. Ces nombres sont rangés dans la 1.re horizontale de manière que, de 3 en 3, on trouve cette somme de 15.

Voici la première tranche des X, tirée des tableaux :

263	252	241	274	295	286	228	217	239
666	658	647	679	693	682	621	614	635
962	951	944	975	996	988	927	919	933
468	457	449	473	492	481	424	415	436
861	854	845	876	898	887	829	813	832
167	159	143	172	191	184	125	116	138
764	755	746	778	797	789	723	712	731
369	353	342	371	394	385	326	318	337
565	556	548	577	599	583	522	511	534

Il n'y aura plus qu'à substituer les multiples au lieu des deux premiers nombres.

Ceux des carrés sont :

1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	81	162	243	324	405	486	567	648

Ceux de la racine

1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	9	18	27	36	45	54	63	72

La tranche ci-dessus sera donc :

129	119	109	139	158	150	98	88	108	=1098	
456	449	439	468	480	470	415	409	428	=4014	
695	685	679	707	726	719	664	657	669	=6201	
296	286	279	300	317	307	256	248	267	=2556	
613	607	599	627	647	637	585	570	587	=5472	=29565
52	45	30	56	73	67	14	6	26	= 369	
535	527	519	548	565	558	498	488	505	=4743	
216	201	191	217	238	230	177	170	187	=1827	
374	366	359	385	405	390	335	325	346	=3285	

On remarque que, dans la tranche ci-dessus formée avec les nombres naturels, la $1.^{re}$ horizontale conserve le même premier nombre, et qu'il en est de même des autres horizontales ; en second lieu, que chaque verticale conserve le même second nombre, qui ne varie que d'une verticale à l'autre; enfin que chaque verticale et chaque horizontale renferme les neuf nombres différens de la racine, qui sont les troisièmes de chaque groupe.

Pour s'assurer qu'il n'y aura pas de nombres répétés dans le cube, il faut comparer le même nombre pris, par exemple, dans chaque horizontale des Z, avec les lignes des X et des Y qui y répondent, et que chacun des neuf nombres de la racine corresponde avec chacun de ceux des multiples. Voici un exemple :

Que l'on compare l'unité du plan des Z avec les horizontales correspondantes des X et des Y : cette unité est au $3.^{e}$ rang à la $1.^{re}$ horizontale ; il faudra donc la $3.^{e}$ horizontale des X et la $7.^{e}$ des Y. L'unité de la $2.^{e}$ horizontale des Z, constante pour toute la bande, étant au $8.^{e}$

rang, se combinera avec la 2.e des X et avec la 2.e des Y, et ainsi de suite, ce qui donnera, en omettant l'unité des Z :

23	12	31	64	55	46	78	97	89	unité de la 1.re horiz. des Z.
76	98	87	29	13	32	61	54	45	unité de la 2.e horizont.
62	51	44	75	96	88	27	19	33	3.e
28	17	39	63	52	41	74	95	86	4.e
71	94	85	26	18	37	69	53	42	5.e
67	59	43	72	91	84	25	16	38	6.e
24	15	36	68	57	49	73	92	81	7.e
79	93	82	21	14	35	66	58	47	8.e
65	56	48	77	99	83	22	11	34	9.e

Il suit que les horizontales des X suivent l'ordre des horizontales des Z, que l'on considère. Quant aux horizontales des Y, elles sont subordonnées au rang qu'occupe l'unité dans ces horizontales des Z. Ces rangs des Y se comptent à partir de la dernière contre l'intersection des X Y, et en remontant : tout cela ne présente aucune difficulté. On voit que les nombres simples se trouvent à chaque horizontale et à chaque verticale du tableau ci-dessus ; et, de plus, ils doivent être joints au même multiple qui est le premier des deux nombres. Ainsi, pour le multiple 4, par exemple, on trouve 46, 45, 44, 41, 42, 43, 49, 47, 48, et de même pour les autres.

Lorsqu'un nombre est composé du produit de deux facteurs premiers, comme 15, 21, 35, etc., il y aura deux espèces de séries, qui comprendront autant de termes qu'il y en a dans l'un des facteurs. Ainsi, pour 15, il viendrait, en prenant, pour commencer la 2.e ligne, les différens nombres de la première, les résultats suivans :

Par le 2.e et le dernier, le moyen à la dernière ou à la première diagonale.

Par le 3.e, série de 5, en augmentant, à la 1.re diagon.
Par le 14.e, série de 5, en diminuant, à la 2.e diagonale.

Par le 4.e et le 13.e, série de 5, en verticale, augmentant pour le 4.e, et diminuant pour le 13.e.

Par le 5.e, série de 3 à la 1.re diagonale, et de 5 à la 2.e, en augmentant.
Par le 12.e, série de 5 à la 1.re diagonale, et de 3 à la 2.e, en diminuant.

Par le 6.e, série de 3 en verticale, et de 5 à la 1.re diagonale, en augmentant.
Par le 11.e, série de 3 en verticale, et de 5 à la 2.e diagonale, en diminuant.

Par le 7.e, série de 5 en verticale, et de 3 à la 2.e diagonale, en augmentant.
Par le 10.e, série de 5 en verticale, et de 3 à la 1.re diagonale, en diminuant.

Par le 8.e, série de 5, en 2.e diagonale, en augmentant.
Par le 9.e, série de 5, en 1.re diagonale, en diminuant.

Ces expressions, augmentant ou diminuant, ne sont ici qu'à raison de l'ordre des nombres, en partant de celui de la 1.re horizontale, qui est toujours le premier ou le dernier de cette ligne; mais, attendu que les trois ou cinq nombres des séries peuvent être dans tel ordre que l'on veut, pourvu que leur somme soit égale à 3 ou 5 fois le moyen, il n'y a pas à faire attention à ces expressions.

Il est bon de se servir d'abord des nombres simples, et dans leur ordre naturel, sauf à rectifier ensuite la 1.re

horizontale. La série de 3 doit être de 24; et celle de 5, de 40, puisque le moyen est 8. Si la série est de 3 nombres, ils doivent se distribuer de 5 en 5 dans cette 1.re horizontale, et de 3 en 3 si la série est de 5 nombres, et à partir du premier, qui est à l'angle.

Soit commencée la 2.e horizontale par le 12.e terme de la 1.re : on aura, par ce qui a été dit ci-dessus, série de 5 à la 1.re diagonale, et série de 3 à la 2.e. Il faudra donc que le 1.er, le 4.e, le 7.e, le 10.e et le 13.e rangs de la 1.re horizontale aient 40 pour somme. Les 3 nombres de la 2.e diagonale doivent avoir 24, et se trouver aux 5.e, 10.e et dernier rangs de cette horizontale; et, comme le 10.e rang est commun avec l'un des précédens, l'un des nombres de la série de 3 aura un nombre de la série de 5. Soit choisie celle-ci, 3, 4, 6, 12, 15, et soit 6 au 10.e rang : il faut encore 18, que l'on peut obtenir par 11 et 7, qui se trouveront par conséquent aux 5.e et dernier rangs. La 1.re horizontale et les cinq suivantes peuvent donc être

3	1	2	4	7	5	12	8	9	6	10	13	15	14	11
13	15	14	11	3	1	2	4	7	5	12	8	9	6	10
8	9	6	10	13	15	14	11	3	1	2	4	7	5	12
4	7	5	12	8	9	6	10	13	15	14	11	3	1	2
11	3	1	2	4	7	5	12	8	9	6	10	13	15	14
10	13	15	14	11	3	1	2	4	7	5	12	8	9	6

Comme on connaît toujours s'il y a série, on corrige aisément la première horizontale, la seule dont on ait à s'occuper, et comme on vient de le dire.

S'il est question des tableaux de multiples, les nombres de la série naturelle représentant ces multiples, il n'y aura qu'à substituer ceux-ci à ceux de la première horizontale rectifiée. Voici cette dernière ligne, avec les multiples des carrés de la racine :

450	0	225	675	1350	900	2475	1575	1800	1125	2025	2700	3150	2925	2250	1re h.
2700	3150	2925	2250	450	0	225	675	1350	900	2475	1575	1800	1125	2025	2.e h.
1575	1800	1125	2025	2700	3150	2925	2250	450	0	225	675	1350	900	2475	3.e h.
675	1350	900	2475	1575	1800	1125	2025	2700	3150	2925	2250	450	0	225	4.e h.
2250	450	0	225	675	1350	900	2475	1575	1800	1125	2025	2700	3150	2925	5.e h.
2025	2700	3150	2925	2250	450	0	225	675	1350	900	2475	1575	1800	1125	6.e h.

La somme des 14 multiples de 225 à 3150=3375.7=23625. Le tiers est 7875, et le 5.e 4725. Or 2250+1125+1350=4725, et de même 450+3150+1125+2475+675=7875. On voit avec quelle facilité on peut former les tableaux.

Si les verticales étaient en série, par exemple, ayant la 1.re horizontale avec les nombres par ordre, et commençant par le 6.e rang, il viendrait :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	1	2	3	4	5
11	12	13	14	15	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	1	2	3	4	5
11	12	13	14	15	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Il y aura donc 5 groupes de 3 nombres, et série de 5 à la 1.re diagonale; mais cette diagonale comprend un nombre de chaque groupe de 3. Ceux-ci valent 24, et ceux de 5 valent 40. Soient les groupes de 3 les suivans :

1 13 10... 3 9 12... 5 8 11... 4 6 14... 2 7 15

Il faut donc un nombre de chacun de ceux-ci, de manière à ce qu'on ait 40. Soient ces nombres 10, 3, 11, 14, 2. Si 10 est le premier de la 1.re horizontale, il faudra que 1 et 13, qui achèvent le groupe, soient aux 6.e et 11.e rangs. Si l'on prend 3 du 2.e groupe pour le 2.e de la diagonale, comme il tient le 7.e rang, 9 et 12 seront au 2.e et au 12.e rang. Soit 14 le 3.e nombre de la diagonale : il sera au 13.e rang, et alors 4 et 6 au 3.e et au 8.e. Si 11 est au 4.e rang de la diagonale, on mettra 5 et 8 aux 9.e et 14.e rangs. Enfin, soit 2 le 5.e de la diagonale, lequel tient le 10.e rang: il faudra que 7 et 15 soient au 5.e et au 15.e rang. La 1.re horizontale rectifiée, et les suivantes, seront en conséquence

10	9	4	11	7	1	3	6	5	2	13	12	14	8	15
1	3	6	5	2	13	12	14	8	15	10	9	4	11	7
13	12	14	8	15	10	9	4	11	7	1	3	6	5	2
10	9	4	11	7	1	3	6	5	2	13	12	14	8	15
1	3	6	5	2	13	12	14	8	15	10	9	4	11	7

Il est inutile de continuer, puisque les lignes se répètent de 3 en 3: il n'y a plus de difficulté à substituer les multiples, ainsi qu'on l'a fait précédemment. On voit comment on agirait dans tous les cas. L'ordre naturel de la première horizontale indique pour les lignes suivantes, lorsque les groupes sont connus, à quelle place il faut mettre les nombres de ces groupes. Il est donc utile, on pourrait dire nécessaire, de faire cette première horizontale de manière à s'assurer du rang des nombres de chaque groupe.

On va donner la manière de former les groupes de 3, et d'en tirer ceux de 5. D'abord, les groupes dont 15 fait partie ne sont qu'au nombre de quatre, savoir : 15, 1, 8... 15, 2, 7.... 15, 3, 6.... 15, 4, 5. On passera à ceux qui comprennent 14, sans aucun des nombres qui entrent dans celui dont 15 fait partie; ensuite à ceux où entre 13, et ne comprenant pas ceux dont 15 et 14 font partie. Il restera 6 nombres qui doivent faire 2 groupes de 24. On peut distribuer cette recherche comme suit :

15 1 8	14 3 7	13 2 9	rien.	....	4 5 6 10 11 12
	....	13 5 6	12 10 2	11 9 4	2 4 9 10 11 12
	14 4 6	13 2 9	12 7 5	11 10 3	3 5 7 10 11 12
15 2 7	14 1 9	13 3 8	rien.	....	4 5 6 10 11 12
	....	13 5 6	12 8 4	11 10 3	3 4 8 10 11 12
	14 4 6	13 1 10	12 9 3	11 8 5	3 5 8 9 11 12
	....	13 3 8	12 11 1	10 9 5	1 5 9 10 11 12
15 3 6	14 1 9	13 4 7	12 10 2	11 8 5	2 5 8 10 11 12
	14 2 8	13 1 10	12 7 5	11 9 4	4 5 7 9 11 12
	....	13 4 7	12 11 1	10 9 5	1 5 9 10 11 12
15 4 5	14 1 9	13 3 8	12 10 2	11 6 7	2 6 7 10 11 12
	14 2 8	13 1 10	12 9 3	11 6 7	3 6 7 9 11 12
	14 3 7	13 1 10	rien.	....	2 6 8 9 11 12
	....	13 2 9	12 11 1	10 6 8	1 6 8 10 11 12

On voit qu'il n'y a que 11 systèmes pour former cinq groupes de 24 avec les 15 premiers nombres.

On tire de ces 11 systèmes plusieurs compositions de groupes de 5. Les voici :

1.er SYSTÈME.

15 1 8...14 3 7...13 5 6...12 10 2...11 9 4

15 14 5 2 4
15 3 6 12 4
15 7 5 2 11
1 14 6 10 9
1 3 13 12 11
1 7 13 10 9
8 14 5 2 11
8 3 13 12 4... 8 3 6 12 11
8 7 6 10 9

2.e SYSTÈME.

15 1 8...14 4 6...13 2 9...12 7 5...11 10 3

15 14 rien.
15 4 13 5 8
15 6 2 7 10...15 6 9 7 3
1 14 2 11 12... 1 14 9 5 11
1 4 13 12 10
1 6 rien.
8 14 2 5 11
8 4 13 12 3...13 5 10
8 6 9 7 10

3.e SYSTÈME.

15 2 7...14 1 9...13 5 6...12 8 4...11 10 3

15 14 rien.
15 1 13 8 3...15 1 5 8 11...15 1 6 8 10
15 9 5 8 3
2 14 13 8 3... 2 14 5 8 11... 2 14 6 8 10
2 1 rien.
2 9 6 12 11
7 14 5 4 10
7 1 13 8 11
7 9 13 8 3... 7 9 5 8 11... 7 9 6 8 10

4.e SYSTÈME.

15 2 7...14 4 6...13 1 10...12 9 3...11 8 5

15 14 rien.
15 4 13 3 5...15 4 1 12 8...15 4 1 9 11...15 4 10 3 8
15 6 rien.
2 14 13 3 8... 2 14 1 12 11... 2 14 10 9 5... 2 14 10 3 11
2 4 rien.
2 6 rien.
7 14 rien.
7 4 rien.
7 6 13 9 5... 7 6 13 3 11... 7 6 10 12 5... 7 6 10 9 8

5.e SYSTÈME.

15 2 7...14 4 6...13 3 8...12 11 1...10 9 5

15 14 rien.
15 4 rien.
15 6 13 1 5...15 6 3 11 5...15 6 8 1 10
2 14 13 1 10... 2 14 3 12 9... 2 14 3 11 10...2 14 8 11 5
2 4 13 12 9... 2 4 13 11 10
2 6 rien.
7 14 13 1 5... 7 14 3 11 5... 7 14 8 1 10
7 4 13 11 5... 7 4 8 11 10... 7 4 8 12 9
7 6 rien.

6.e SYSTÈME.

15 3 6...14 1 9...13 4 7...12 10 2...11 8 5

15 14 4 2 5
15 1 4 12 8...15 1 7 12 5
15 9 rien.
3 14 13 2 8
3 1 13 11 12
3 9 13 10 5... 3 9 7 10 11
6 14 13 2 5... 6 14 7 2 11
6 1 13 12 8
6 9 4 10 11... 6 9 7 10 8

7.e SYSTÈME.

15 3 6...14 2 8...13 1 10...12 7 5...11 9 4

15 14 rien.
15 2 rien.
15 8 1 12 4...15 8 1 7 9
3 14 rien.
3 2 rien.
3 8 13 12 4...3 8 13 7 9
6 14 rien.
6 2 rien.
6 8 10 12 4... 6 8 10 7 9

8.e SYSTÈME.

15 3 6...14 2 8...13 4 7...12 11 1...10 9 5

15 14 rien.
15 2 13 1 9...15 2 7 11 15
15 8 7 1 9
3 14 13 1 9... 3 14 7 11 15
3 2 13 12 10
3 8 13 11 5... 3 8 7 11 9
6 14 4 11 5
6 2 rien.
6 8 4 12 10

9.e SYSTÈME.

15 4 5...14 1 9...13 3 8...12 10 2...11 6 7

15 14 3 2 6
15 1 3 10 11...15 1 8 10 6
15 9 3 2 11...15 9 8 2 6
4 14 13 2 7... 4 14 3 12 7
4 1 rien.
4 9 8 12 7
5 14 13 2 6... 5 14 3 12 6... 5 14 8 2 11
5 1 13 10 11
5 9 13 2 11... 5 9 3 12 11... 5 9 8 12 6

10.e SYSTÈME.

15 4 5...14 2 8...13 1 10...12 9 3...11 6 7

15 14 1 3 7
15 2 13 3 7
15 8 1 9 7
4 14 13 3 6
4 2 rien.
4 8 13 9 6... 4 8 10 12 6
5 14 1 9 11
5 2 13 9 11... 5 2 10 12 11
5 8 13 3 11

11.e SYSTÈME.

15 4 5...14 3 7...13 2 9...12 11 1...10 6 8

15 14 2 1 8
15 3 13 1 8...15 3 2 12 8
15 7 9 1 8
4 14 13 1 8... 4 14 2 12 8
4 3 13 12 8
4 7 9 12 8
5 14 2 11 8
5 3 13 11 8
5 7 9 11 8

Il serait plus difficile de tirer d'une série de 5 nombres les 5 groupes de 3; par exemple, 15, 14, 6, 1, 4, ne fourniraient pas, en prenant un nombre pour chaque groupe de 3, ce qui serait nécessaire pour les compléter. Il suffit de ce qui vient d'être dit, pour guider dans les autres cas.

Il est temps d'examiner les cubes pairs.

ARTICLE V.

CUBE DE 4.

Le plus simple des cubes pairs étant celui de 4, on va d'abord s'en occuper.

Ce cube se forme par les tableaux connus. On peut, ou répéter les nombres dans les trois tableaux; ou n'en répéter aucun; ou avoir des tableaux à nombres répétés, et d'autres sans répétition de nombres.

On voit (*figure* 923, *planche* XLVI) les tableaux avec nombres répétés.

Chaque tranche doit avoir 520, la somme des termes étant 65·32=2080, dont le quart=520.

Dans la figure 323 les nombres des trois plans sont répétés; mais dans celui des Y la répétition a lieu en verticale, et dans les deux autres en horizontale. Si elle se faisait dans les trois plans de la même manière, on aurait des nombres répétés, ce qui s'aperçoit sur le champ.

Voici les tranches parallèles aux différens plans:

Tranches parallèles au plan des Y, *les bandes prises parallèlement à l'intersection* XY.

1 14 15 4 = 34	20 31 30 17 = 98
53 58 59 56 = 226	40 43 42 37 = 162
57 54 55 60 = 226	44 39 38 41 = 162
13 2 3 16 = 34	32 19 18 29 = 98
36 47 46 33 = 162	49 62 63 52 = 226
24 27 26 21 = 98	5 10 11 8 = 34
28 23 22 25 = 98	9 6 7 12 = 34
48 35 34 45 = 162	61 50 51 64 = 226

Tranches parallèles au plan des Z, *les bandes prises parallèlement à l'intersection des* YZ.

1 53 57 13 = 124	14 58 54 2 = 128
20 40 44 32 = 136	31 43 39 19 = 132
36 24 28 48 = 136	47 27 23 35 = 132
49 5 9 61 = 124	62 10 6 50 = 128
15 59 55 3 = 132	4 56 60 16 = 136
30 42 38 18 = 128	17 37 41 29 = 124
46 26 22 34 = 128	33 21 25 45 = 124
63 11 7 51 = 132	52 8 12 64 = 136

Tranches parallèles au plan des **X**, *bandes prises parallèlement à l'intersection des* **XZ**.

13 32 48 61 = 154	57 44 28 9 = 138
2 19 35 50 = 106	54 39 23 6 = 122
3 18 34 51 = 106	55 38 22 7 = 122
16 29 45 64 = 154	60 41 25 12 = 138

53 40 24 5 = 122	1 20 36 49 = 106
58 43 27 10 = 138	14 31 47 62 = 154
59 42 26 11 = 138	15 30 46 63 = 154
56 37 21 8 = 122	4 17 33 52 = 106

Tranches diagonales du plan des **X**, *bandes prises parallèlement à l'intersection des* **YZ**.

1.re TRANCHE DIAGONALE.	2.e TRANCHE DIAGONALE.
1 53 57 13 = 124	49 5 9 61 = 124
31 43 39 19 = 132	47 27 23 35 = 132
46 26 22 34 = 128	30 42 38 18 = 128
52 8 12 64 = 136	4 56 60 16 = 136

Tranches diagonales du plan des **Y**, *bandes prises parallèlement à l'intersection des* **XZ**.

1.re TRANCHE DIAGONALE.	2.e TRANCHE DIAGONALE.
1 20 36 49 = 106	13 32 48 61 = 154
58 43 27 10 = 138	54 39 23 6 = 122
55 38 22 7 = 122	59 42 26 11 = 138
16 29 45 64 = 154	4 17 33 52 = 106

Tranches diagonales du plan des Z, bandes prises parallèlement à l'intersection des XY.

1.re TRANCHE DIAGONALE.	2.e TRANCHE DIAGONALE.
49 62 63 52 = 226	61 50 51 64 = 226
24 27 26 21 = 98	28 23 22 25 = 98
44 39 38 41 = 162	40 43 42 37 = 162
13 2 3 16 = 34	1 14 15 4 = 34

On verra (*figure* 324, *planche* XLVI) un autre arrangement; mais il est superflu, au moyen de ce qui précède, de donner le détail des tranches de ce carré.

Il est facile de revenir du cube aux tableaux d'après lesquels il a été formé : ainsi, ayant choisi une des faces du cube comme contenant les quatre nombres de la racine, une autre pour les multiples, et la 3.e pour les multiples du carré, on ôtera d'un nombre quelconque du cube le plus grand multiple du carré; du reste, le plus grand multiple de la racine : il restera le nombre de la racine correspondant. Agissant de même sur chaque nombre d'une bande, on obtiendra une ligne de chaque tableau, et par suite les tranches ou les tableaux.

ARTICLE VI.

CUBE DE 8.

Il est très-facile de composer les cubes dont la racine est divisible par 4. En effet, d'après la manière dont se forment les tableaux pour ce cas, on sait qu'ils sont de la construction la plus expéditive et la moins difficile. Il

faut, comme on l'a dit ci-dessus, pour éviter des nombres répétés, qu'après avoir adopté un mode de composition, l'on évite de faire les tableaux de la même manière; c'est-à-dire que si deux plans ont cette composition en horizontale par exemple, le troisième l'aura en verticale, et réciproquement. Cela doit avoir lieu toutes les fois qu'il y a des nombres répétés dans l'une des lignes d'un tableau.

Dans le cube (*figure* 325, *planche* XLVI) les nombres répétés en horizontale sont aux plans Y et Z, mais ils sont en verticale au plan X.

On donnera quelques tranches de ce cube de 8, celle des X ayant, ainsi que celle des Y, les bandes parallèles à l'intersection XY; quant aux bandes de celle des Z, elles seront parallèles à l'intersection des YZ.

Le cube de 8 est 512; la somme des 512 premiers nombres $= \frac{513 \cdot 512}{2} = 513 \cdot 256$, dont le 8.e pour chaque tranche $= 513 \cdot 32 = 16416$.

17	42	19	44	45	22	47	24	= 260	16416, 3.e tranche des X.
88	111	86	109	108	83	106	81	= 772	
145	170	147	172	173	150	175	152	= 1284	
216	239	214	237	236	211	234	209	= 1796	
280	303	278	301	300	275	298	273	= 2308	
337	362	339	364	365	342	367	344	= 2820	
408	431	406	429	428	403	426	401	= 3332	
465	490	467	492	493	470	495	472	= 3844	

1	58	3	60	61	6	63	8	= 260	16416, 1.re tranche des Y.
457	498	459	500	501	462	503	464	= 3844	
17	42	19	44	45	22	47	24	= 260	
473	482	475	484	485	478	487	480	= 3844	
481	474	483	476	477	486	479	488	= 3844	
41	18	43	20	21	46	22	48	= 260	
497	458	499	460	461	502	463	504	= 3844	
57	2	59	4	5	62	7	64	= 260	

1	457	17	473	481	41	497	57	= 2024	16416, dernière tranche des Z.
72	400	88	416	424	112	440	128	= 2080	
129	329	145	345	353	169	369	185	= 2024	
200	272	216	288	296	240	312	256	= 2080	
264	208	280	224	232	304	248	320	= 2080	
321	137	337	153	161	361	177	377	= 2024	
392	80	408	96	104	432	120	448	= 2080	
449	9	465	25	33	489	49	505	= 2024	

On peut remarquer que les bandes des Y et des Z n'ont que deux espèces de sommes pour les nombres qui les composent.

Voici une tranche diagonale, la seconde des X (par exemple).

8	464	24	480	488	48	504	64	=2080
122	434	106	418	410	82	394	66	=2032
134	334	150	350	358	174	374	190	=2064
252	308	236	292	284	212	268	196	=2048
317	245	301	229	221	277	205	261	=2056
323	139	339	155	163	363	179	379	=2040
447	119	431	103	95	407	79	391	=2072
449	9	465	25	33	489	49	505	=2024

16416, 2.e tranche diagonale des X.

Si l'on voulait calculer les combinaisons dont est susceptible la forme de la figure 325, comme une moitié de chaque ligne a son complément dans l'autre moitié, on aura une puissance de 4 égale au nombre de fois qu'il est contenu dans la racine. Ici ce sera 4^2 pour les combinaisons qu'on peut faire avec 8 nombres, dont 4 ne contiendront point de complémens.

Voici ces 16 combinaisons :

1 2 3 4.....1 2 3 5.....1 2 4 6....1 2 5 6...
1 3 4 7.....1 3 5 7.....1 4 6 7....1 5 6 7...
2 3 4 8.....2 3 5 8.....2 4 6 8....2 5 6 8...
3 4 7 8.....3 5 7 8.....4 6 7 8....5 6 7 8

Chacune de ces combinaisons aura $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ permutations : donc il viendra $16 \cdot 24 = 384$. Mais chaque face du cube est susceptible du même nombre de combinaisons : ainsi on obtiendra 384^3. Or on peut avoir la série en verticale dans l'une ou l'autre des trois faces, ou bien deux séries en verticale et une seule en horizontale dans l'une ou l'autre des faces : il faut donc multiplier 384^3 par 6,

et il vient 339,738,624 combinaisons pour la seule forme de la figure 325.

On n'est pas borné à cette forme. Il y en a grand nombre d'autres : par exemple, les deux nombres complémens dont la somme est 9 peuvent alterner : 1, 8, 1, 8, 1, 8, 1, 8. Les lignes peuvent avoir série de 4 nombres, dont la somme serait $2 \cdot 9 = 18$, et placés aux 1.er, 3.e, 5.e et 7.e rangs de la première ligne, etc., etc.

Si la racine n'est pas une puissance exacte de 2, on verra aisément quelles sont les séries : ainsi, pour $12 = 3 \cdot 4$, il peut y avoir des séries de 2, de 3, de 4, de 6. Ces séries sont les diviseurs de 12, et de même pour les autres nombres divisibles par 4.

Comme il n'y a pas de moyen dans la progression d'un nombre pair de termes, on ne peut commencer la 2.e ligne d'un tableau par le 2.e ou dernier nombre de la première (on suppose ici que les lignes conservent l'ordre des nombres de la première). On ne peut d'ailleurs commencer la 2.e ligne par le premier nombre de la première : car chaque verticale serait composée d'un même nombre répété; mais il y a de l'analogie quant aux séries lorsqu'on choisit, pour commencer la 2.e ligne, des nombres à égale distance des 2.e et dernier de la première ligne. Ainsi,

Par le 3.e : série de 6 en verticale..... série de 4 à la 1.re diagonale.
Par le 11.e........ *id*............... série de 4 à la 2.e diagonale.
Par le 4.e : série de 4 en verticale..... série de 3 à la 1.re, et de 6 à la 2.e diagonale.
Par le 10.e........ *id*............... série de 6 à la 1.re, et de 3 à la 2.e diagonale.
Par le 5.e : série de 3 en verticale..... série de 4 à la 2.e diagonale.
Par le 9.e........ *id*............... série de 4 à la 1.re diagonale.
Par le 6.e......................... série de 2 à la 1.re, et de 3 à la 2.e diagonale.
Par le 8.e......................... série de 3 à la 1.re, et de 2 à la 2.e diagonale.
Par le 7.e : série de 2 en verticale.

Les rangs où il faut placer les nombres dans la 1.re horizontale sont déterminés par les nombres verticaux ou diagonaux résultant de celui qui commence la 2.e ligne horizontale. Par exemple, que l'on commence cette 2.e ligne par le 4.e nombre de la première, laquelle suivra l'ordre naturel ; il viendra :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7							2	3
7	8	9	10						4	5	6
10	11	12	1					6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3
7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6

On voit que les nombres répétés en verticale auront les 1.er, 4.e, 7.e et 10.e rangs dans la 1.re horizontale, puis les 2.e, 5.e, 8.e et 11.e; enfin les 3.e, 6.e, 9.e et 12.e.

Ceux de la 1.re diagonale suivront les 1.er, 5.e et 9.e rangs; et ceux de la 2.e diagonale, les 12.e, 2.e, 4.e, 6.e, 8.e et 10.e rangs. Il faut satisfaire à ces conditions. Les séries de trois nombres doivent avoir pour somme le quart de 78, qui est celle des douze premiers nombres. Or 78 n'est pas divisible par 4 : on ne peut donc employer les combinaisons dans lesquelles entrera cette série de trois nombres; mais celles qui sont composées de 2, de 4 et de 6 nombres, seront convenables. Il suit qu'on ne peut commencer la 2.e horizontale par les 4.e, 5.e, 6.e, 8.e, 9.e et 10.e nombres de la première : il ne reste que les 3.e, 7.e et 11.e nombres.

On a vu qu'en commençant par le 3.e, on aurait série de 6 en verticale, et de 4 à la 1.re diagonale. La série de 6 doit avoir pour somme $\frac{78}{2}=39$; et celle de 4, $\frac{78}{3}=26$.

Voici les diverses manières d'avoir 26 avec 4 des 12 premiers nombres :

1 2 11 12	1 4 10 11	1 6 9 10		
1 3 10 12	1 5 9 11	1 7 8 10		
1 4 9 12	1 6 8 11			
1 5 8 12				
1 6 7 12				
2 3 9 12	2 3 10 11	2 5 9 10	2 7 8 9	
2 4 8 12	2 4 9 11	2 6 8 10		
2 5 7 12	2 5 8 11			
	2 6 7 11			
3 4 7 12	3 4 8 11	3 4 9 10	3 6 8 9	
3 5 6 12	3 5 7 11	3 5 8 10		
		3 6 7 10		
	4 5 6 11	4 5 7 10	4 5 8 9	5 6 7 8
			4 6 7 9	

Mais la série de 6 doit être placée aux 1.er, 3.e, 5.e, 7.e, 9.e et 11.e rangs de la 1.re horizontale; et celle de 4, aux 1.er, 4.e, 7.e et 10.e rangs. Ainsi le 1.er et le 7.e seront communs à la verticale et à la 1.re diagonale. Il faut satisfaire à cette condition, ce qui est très-facile. Qu'on ait choisi, par exemple, pour la série de la 1.re verticale les nombres 3, 4, 5, 8, 9, 10 = 39 : toutes les séries de 4 ci-dessus qui comprendront deux des six de la précédente série, conviendront; l'un sera placé au 1.er rang, et l'autre au 7.e rang de la 1.re horizontale. Ayant pris 2, 4, 8, 12 = 26, on aura 4 et 8 communs, et la 1.re horizontale peut être

4 1 3 2 5 7 8 11 9 12 10 6

Pour le seul choix adopté, le nombre des combinaisons est considérable. D'abord, 4 et 8 peuvent alterner; les 4 nombres 3, 5, 9, 10, présentent 24 combinaisons; les 2 nombres 9 et 12 peuvent changer de place. Enfin les nombres 1, 6, 7, 11, présentent aussi 24 combinaisons, ce qui donnera, pour ce cas particulier, $4 \cdot 24^2 = 2304$ combinaisons différentes.

Si, au lieu de la progression des nombres de la racine, on a celle de ses multiples, ou des multiples de son carré, il n'y a pas plus de difficulté à éprouver, puisque les rangs peuvent toujours être facilement déterminés.

On donne encore les séries pour les vingt premiers nombres. La 1.re horizontale est toujours composée de ces premiers nombres par ordre, afin de déterminer les rangs des nombres de séries.

Par le 3.e et le 19.e : verticales, série de 10.

Par le 4.e .... { 1.re diagonale, série de 5. / 2.e diagonale, série de 10.

Par le 18.e .... { 1.re diagonale, série de 10. / 2.e diagonale, série de 5.

Par le 5.e .... verticales, série de 5... 1.re diagonale, série de 4.
Par le 17.e .... *id* .... 2.e diagonale, série de 4.

Par le 6.e .... verticales, série de 4... 1.re diag., série de 10; 2.e diag., série de 5.
Par le 16.e .... *id* .... 1.re diag., série de 5; 2.e diag., série de 10.

Par le 7.e .... verticales, série de 10... 2.e diagonale, série de 4.
Par le 15.e .... *id* .... 1.re diagonale, série de 4.

Par le 8.e .... 1.re diag., série de 5; 2.e diag., série de 10.
Par le 14.e .... 1.re diag., série de 10; 2.e diag., série de 5.

Par les 9.e et 13.e : verticales, série de 5.

Par le 10.e .... 1.re diag., série de 2; 2.e diag., série de 5.
Par le 12.e .... 1.re diag., série de 5; 2.e diag., série de 2.

Par le 11.e : verticales, série de 2.

Les séries ont les valeurs suivantes, chaque couple valant 21.

Série de 2 vaut 21.... série de 4 vaut 42.... série de 10 vaut 105.... série de 5 ne peut s'obtenir, puisque 210, valeur des vingt premiers nombres, ne se divise pas par 4.

On ne peut donc commencer la 2.e ligne par les nombres des 4.e, 5.e, 6.e, 8.e, 9.e, 10.e, 12.e, 13.e, 14.e, 16.e, 17.e et 18.e rangs de la 1.re horizontale; et, comme les 1.er, 2.e et 20.e sont exclus pour les racines paires, il ne reste que les 3.e, 7.e, 11.e, 15.e et 19.e, qui se suivent de 4 en 4.

De même, pour 36 chaque couple vaut 37: d'où il suit qu'on ne peut avoir de séries de 3 ou de 9 nombres : car il viendrait 37 • 18 pour somme des 36 premiers nombres, dont le douzième et le quart ne peuvent s'obtenir en nombres entiers; ou, mieux, puisqu'un couple est impair, un couple et demi ou quatre couples et demi sont des nombres fractionnaires, par conséquent inadmissibles.

D'après ce qui vient d'être exposé, voici, pour 20 de racine, et en commençant la 2.e horizontale par le 7.e terme de la première, ce qu'il y aurait à faire.

La 2.e diagonale aura série de 4 nombres, et les verticales série de 10. Il faut 105 pour ces 10 nombres. Que l'on choisisse 1, 2, 3, 4, 5, 16, 17, 18, 19, 20=105. Ces nombres sont placés aux 10 rangs impairs; les 4 de la 2.e diagonale seront aux 5.e, 10.e, 15.e, 20.e, c'est-à-dire que le 5.e et le 15.e rangs contiendront des nombres communs. Or ces 4 nombres doivent faire 42, somme de 2 couples. Soient choisis 4 et 19 : il faut encore 19, qu'on peut faire

avec 9 et 10. Il est clair que les nombres restans 6, 7, 8, 11, 12, 13, 14, 15, ajoutés à 19, doivent faire aussi 105. Mais ces 8 nombres restans, ainsi que 9 et 10, seront placés aux cases paires. Ayant donc la première ligne horizontale naturelle

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

Elle deviendra rectifiée par une foule de combinaisons, parmi lesquelles on peut choisir celle-ci :

1 6 16 7 4 8 20 11 2 9 3 12 5 13 19 14 17 15 18 10

on met 4 et 19 aux 5.e et 15.e rangs à volonté; il en est de même de 9 et 10 aux 10.e et 20.e rangs; les nombres 1, 2, 3, 5, 16, 17, 18, 20, dans les rangs impairs placés aussi à volonté également, ainsi que les nombres 6, 7, 8, 11, 12, 13, 14, 15, aux rangs pairs.

Voici les premières lignes du résultat. Il suffit de dix lignes : les dix suivantes sont les mêmes pour les verticales, et l'on voit assez la série de la 2.e diagonale. On formera avec ce tableau, et ceux des multiples substitués aux nombres simples, le cube de 20.

1	6	16	7	4	8	20	11	2	9	3	12	5	13	19	14	17	15	18	10
20	11	2	9	3	12	5	13	19	14	17	15	18	10	1	6	16	7	4	8
5	13	19	14	17	15	18	10	1	6	16	7	4	8	20	11	2	9	3	12
18	10	1	6	16	7	4	8	20	11	2	9	3	12	5	13	19	14	17	15
4	8	20	11	2	9	3	12	5	13	19	14	17	15	18	10	1	6	16	7
3	12	5	13	19	14	17	15	18	10	1	6	16	7	4	8	20	11	2	9
17	15	18	10	1	6	16	7	4	8	20	11	2	9	3	12	5	15	19	14
16	7	4	8	20	11	2	9	3	12	5	13	19	14	17	15	18	10	1	6
2	9	3	12	5	13	19	14	17	15	18	10	1	6	16	7	4	8	20	11
19	14	17	15	18	10	1	6	16	7	4	8	20	11	2	9	3	12	5	13

1 etc.

Il est temps de passer aux racines divisibles par 2 seulement.

ARTICLE VII.

CUBE DE 6.

Il y a plusieurs manières de former le carré des 6 premiers nombres sans en répéter aucun. En voici quelques-unes :

1	2	3	4	5	6
5	4	1	6	2	3
2	5	6	3	4	1
3	6	5	2	1	4
6	1	4	5	3	2
4	3	2	1	6	5

1	2	3	4	5	6
6	5	4	3	2	1
4	6	2	5	1	3
2	3	1	6	4	5
5	4	6	1	3	2
3	1	5	2	6	4

1	2	3	4	5	6
6	5	4	3	2	1
2	4	6	1	3	5
3	1	5	2	6	4
5	3	1	6	4	2
4	6	2	5	1	3

1	2	3	4	5	6
5	4	1	6	3	2
3	5	6	2	4	1
2	6	5	3	1	4
6	1	4	5	2	3
4	3	2	1	6	5

1	2	3	4	5	6
2	3	6	1	4	5
4	1	5	2	6	3
5	4	1	6	3	2
6	5	4	2	3	1
3	6	2	5	1	4

1	2	3	4	5	6
2	4	6	1	3	5
3	1	5	2	6	4
5	3	1	6	4	2
6	5	4	3	2	1
4	6	2	5	1	3

La 3.ᵉ et la 6.ᵉ manières sont les plus faciles à retenir.

On ne pourrait cependant faire un cube magique avec un seul, ou avec deux, ou enfin avec trois de ces tableaux, en substituant, comme il le faut, les multiples au lieu des nombres simples dans deux tableaux.

Voici d'autres tableaux à nombres répétés et déjà donnés, lesquels servent au carré de 36, en substituant dans l'un d'eux les multiples aux simples, et en renversant les verticales pour en faire les horizontales.

1 2 3 4 5 6	1 2 3 4 5 6
6 2 4 3 5 1	6 2 4 3 5 1
6 5 4 3 2 1	6 5 3 4 2 1
1 5 4 3 2 6	1 5 3 4 2 6
6 2 3 4 5 1	6 2 4 3 5 1
1 5 3 4 2 6	1 5 4 3 2 6

1 2 3 4 5 6	1 2 3 4 5 6
6 5 3 4 2 1	6 5 3 4 2 1
6 2 4 3 5 1	6 2 4 3 5 1
6 5 4 3 2 1	1 2 4 3 5 6
1 5 3 4 2 6	6 5 4 3 2 1
1 2 4 3 5 6	1 5 3 4 2 6

Si l'on emploie la première forme (*fig.* 326, *pl.* XLVII), les tranches seront exactes, mais il y aura des nombres répétés, et par conséquent des nombres manquans.

1.re TRANCHE DES X.

1	32	33	4	35	6	=	111	
42	68	70	39	71	37	=	327	
78	107	106	75	104	73	=	543	
109	143	142	111	140	114	=	759	= 3906
150	176	177	148	179	145	=	975	
181	215	213	184	212	186	=	1191	

2.e TRANCHE DES X.

187	188	207	208	191	210	=	1191	
48	44	64	63	47	61	=	327	
120	119	136	135	116	133	=	759	= 3906
79	83	100	99	80	102	=	543	
156	152	171	172	155	169	=	975	
7	11	27	28	8	30	=	111	

Ces tranches, ainsi que les quatre suivantes, sont prises de manière que leurs bandes sont parallèles à l'intersection X Y.

3.e TRANCHE DES X.

193	200	201	202	197	198	= 1191		
162	164	166	165	161	157	= 975		
126	131	130	129	122	121	= 759		
85	95	94	93	86	90	= 543	= 3906	
54	56	57	58	53	49	= 327		
13	23	21	22	14	18	= 111		

4.e TRANCHE DES X.

19	14	15	16	23	24	= 111	
168	158	160	159	167	163	= 975	
132	125	124	123	128	127	= 759	
91	89	88	87	92	96	= 543	= 3906
60	50	51	52	59	55	= 327	
199	197	195	196	200	204	= 1191	

On pourrait se dispenser de continuer; on voit déjà quelques nombres répétés, tels que 14, 23. Il ne faut donc pas conclure de l'exactitude des tranches celle du cube. Il y a d'autres nombres répétés, comme on pourra s'en convaincre.

5.e TRANCHE DES X.

205	206	189	190	209	192	= 1191	
66	62	46	45	65	43	= 327	
102	101	82	81	98	79	= 543	
133	137	118	117	134	120	= 759	= 3906
174	170	153	154	173	151	= 975	
25	29	9	10	26	12	= 111	

6.e TRANCHE DES X.

31	2	3	34	5	36	= 111	= 3906
180	146	148	177	149	175	= 975	
108	77	76	105	74	103	= 543	
139	113	112	141	110	144	= 759	
72	38	39	70	41	67	= 327	
211	185	183	214	182	216	= 1191	

Voici encore une tranche des Y et une des Z, les bandes prises parallèlement à l'intersection Y Z.

1.re TRANCHE DES Y.

1	187	193	19	205	31	= 636	= 3906
32	188	200	14	206	2	= 642	
33	207	201	15	189	3	= 648	
4	208	202	16	190	34	= 654	
35	191	197	23	209	5	= 660	
6	210	198	24	192	36	= 666	

4.e TRANCHE DES Z.

33	207	201	15	189	3	= 648	= 3906
70	64	166	160	46	148	= 654	
106	136	130	124	82	76	= 654	
142	100	94	88	118	112	= 654	
177	171	57	51	153	39	= 648	
213	27	21	195	9	183	= 648	

Encore une diagonale.

1.re DIAGONALE DES X.

1	187	193	19	205	31	=	636	= 3906
68	44	164	158	62	146	=	642	
106	136	130	124	82	76	=	654	
111	99	93	87	117	141	=	648	
179	155	53	59	173	41	=	660	
186	30	18	204	12	216	=	666	

Toutes les tranches sont exactes; et cependant les six tranches des X qui forment le cube ont des nombres répétés, et par conséquent des nombres manquans.

Les nombres doubles sont :

14 23 39 70 79 102 120 133 148 177 197 200

Les nombres manquans sont :

17 20 40 69 84 97 115 138 147 178 194 203

Il suit qu'il faut procéder à la vérification avant de former le cube, pour ne pas faire d'opérations inutiles et fausses.

Il faut aussi éviter de donner aux bandes d'un tableau plus ou moins en somme qu'elles ne doivent avoir. Ainsi on verra (*figure* 327, *planche* XLVII) la face des X composée de manière que les bandes parallèles à l'intersection des X Z comprennent plus ou moins de 21. Cependant, en formant les tranches, on trouvera tous les nombres, et l'on aura les tranches parallèles aux X et celles parallèles aux Y, exactes; mais il n'en sera pas de même de celles parallèles aux Z. Il ne faudrait donc pas conclure que le cube est exact, quoiqu'il renferme tous les nombres. Il y aurait donc encore à faire la vérification.

Le cube (*figure* 328, *planche* XLVII) est exact, et résulte de la seconde forme de composition à nombres répétés donnée plus haut. Cette forme est en horizontale dans les deux tableaux de multiples de la figure, il est facile de s'en assurer. Il faut donc, lorsqu'on choisira une forme, vérifier le résultat; il n'est d'ailleurs nécessaire de faire cette vérification que jusqu'à la moitié. Ainsi, prenant le 0 du multiple des carrés, on verra si, combiné avec les multiples de la racine, on obtient pour chaque résultat tous les nombres de la racine. On passe à un second multiple des carrés, et l'on agira de même : cela se fait à l'œil.

Par exemple, pour le 1.er 0 des multiples du carré il vient : 0, 30, 30, 0, 30, 0, auxquels répondent les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Le dernier 0 donne 30, 0, 0, 30, 0, 30, avec 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Le 2.e 0 donne 18, 12, 18, 18, 12, 12, et 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Le 2.e 0 de la dernière ligne donne 12, 18, 12, 12, 18, 18, avec 1, 5, 4, 3, 2, 6.

Le 1.er 0 fournit 6, 6, 24, 24, 6, 24, et 1, 5, 4, 3, 2, 6.

Le dernier 0 aura 24, 24, 6, 6, 24, 6, et toujours 1, 5, 4, 3, 2, 6.

Le résultat serait :

1	32	33	4	35	6
31	2	3	34	5	36
19	14	21	22	17	18
13	23	16	15	20	24
7	11	28	27	8	30
25	29	10	9	26	12

ce qui donne les 36 premiers nombres. Il suit, sans essayer 180, que l'on obtiendra les 36 derniers.

On passerait au multiple 36, et l'on doit avoir les 36 nombres après les premiers. On omettra 144. Enfin 72 donnera les nombres qui viennent après les 72 premiers.

ARTICLE VIII.

CUBE DE 10.

On n'entrera dans aucun détail; on consultera les faces (*figure* 329, *planche* XLVII.) Les tableaux sont du nombre de ceux donnés pour le carré de 10.

ARTICLE IX.

PROGRESSIONS AUTRES QUE CELLE DES NOMBRES NATURELS.

Si la progression est autre que celle des nombres naturels, il n'y a pas plus de difficulté. Dans le cas de la série des nombres naturels, le multiple après 0 est la racine même. Dans le cas que l'on considère, on prend l'excès du nombre qui vient après le dernier de la racine sur le premier; c'est cet excès qui est le premier multiple après 0. Ce même excès, ajouté au plus grand multiple de la racine dans l'ordre naturel, donnera le plus petit multiple du carré de la racine : ainsi, dans la progression 2·5·8·11·14·17, etc., jusqu'au 64.e terme, qui est le cube de 4, puisqu'on suppose 4 la racine, les simples seront 2·5·8·11; le suivant est 14; or 14—2=12 : ce sera le multiple qui remplacera 4. Le plus grand étant 36, si l'on ajoute 12, on aura 48, qui remplacera 16, carré de la racine, et 48 sera le plus petit multiple du carré de la racine.

Mieux encore : puisque la différence de la progression est 3, si l'on multiplie 3 par 4, on aura 12 pour le premier multiple après 0; et si l'on multiplie 16, carré de la racine, par 3, il viendra 48. Ce dernier moyen est le plus expéditif pour obtenir les multiples. Les tableaux seront donc ici :

2	11	11	2	0	12	24	36	0	144	144	0
5	8	8	5	36	24	12	0	48	96	96	48
8	5	5	8	36	24	12	0	96	48	48	96
11	2	2	11	0	12	24	36	144	0	0	144

Soit encore 8 la racine, et la progression 3·8·13·18·23·28·33·38, 43·48, etc. : le dernier terme sera 511·5+3 =2558; or 43—3=40 sera le premier multiple de la racine. On aurait de même 8·5=40, puisque la différence de la progression est 5. Les multiples seront donc 0·40·80·120·160·200·240·280. Les multiples du carré de la racine seront, pour le premier, 280+40=320; pour le 2.e, 640 : ainsi l'on aura 0·320·640·960·1280·1600·1920·2240. On aurait obtenu plus facilement 320 par 64·5 pour premier multiple du carré de la racine. Les trois plus grands nombres 2240+280+38 ont pour somme 2558, ainsi qu'on l'a déjà trouvé.

Si la série est interrompue, on agira toujours de même. Soient, par exemple, les progressions

4 · 7 · 10 · 13 · 16 · 19 · 22 · 25
30 · 33 · 36 · 39 · 42 · 45 · 48 · 51
56 · 59 · 62 · 65 · 68 · 71 · 74 · 77, etc.

La différence est 3; l'intervalle est 5; la différence de 30 à 4=26 : donc 26 est le premier multiple de la racine, non compris 0. De même, puisque les multiples de la

racine sont 0, 26, 52, 78, 104, 130, 156, 182, le plus grand étant 182, si on lui ajoute 26, il viendra 208 pour le plus petit des multiples du carré de la racine : ils seront donc 0, 208, 416, 624, 832, 1040, 1248, 1456. En effet, si l'on ajoute 25 à 7·26, on aura 207; et si l'on ajoute à ce dernier 7·208, il viendra 1663 pour le plus grand nombre du cube. Ce nombre doit être égal à $63 \cdot 26 + 25 = 1638 + 25 = 1663$. Il est donc facile de faire un cube magique avec des progressions continues ou discontinues.

Il est bon de retenir la manière de former les tableaux pour les cubes dont la racine ne se divise que par 2 : ce sont les seuls qui présentent quelque difficulté.

La 1.re verticale a les deux extrêmes égaux ; on alterne ensuite jusqu'aux nombres du milieu, qui sont différens. Pour les autres verticales les extrémités diffèrent, et l'on alterne ensuite en partant successivement du bas en haut et du haut en bas, ligne par ligne, et faisant les nombres du milieu des lignes égaux. Il suffit d'arriver à la moitié des verticales ; l'autre moitié est l'inverse de la première. Les deux nombres de chaque verticale sont complémens l'un de l'autre. Il suffit d'un tableau : les deux autres sont le même, dans lequel on substitue les multiples aux simples, et seront en verticale ce que l'autre est en horizontale, et réciproquement. Il est à remarquer qu'à chaque intersection des faces du cube il ne doit y avoir de nombres répétés qu'à l'une des lignes qui longent cette intersection.

Il n'est pas hors de propos de dire un mot sur la manière dont les tranches des faces dérivent les unes des autres. Cela est même indispensable pour éviter la recherche

toujours fatigante des tranches par l'addition successive de trois nombres.

ARTICLE X.

DÉRIVATION DES TRANCHES.

Soit S le signe des nombres simples, R celui des multiples de la racine, et R^2 celui des multiples du carré de la racine. Soient les tranches prises parallèlement au plan des X (*figure* 328); et les bandes, parallèlement à l'intersection des XY, à partir de la dernière case de la bande.

Les nombres simples varient à chaque bande; les multiples de la racine ou les valeurs de R sont constantes pour une même tranche, et celles de R^2 pour une même bande. Les valeurs de S, quoique variables à chaque bande, restent les mêmes pour toutes les tranches.

On peut disposer les tranches comme suit: les multiples pour R et R^2 sont indiqués par le chiffre simple qui désigne l'ordre du multiple, sans y comprendre 0, qui en fait partie: ainsi, pour R, le chiffre 4 désigne le 4.e multiple effectif, dont le premier est 6, et par conséquent 4 vaut $4 \cdot 6 = 24$. Il en est de même pour R^2: ainsi S signifie $36 \cdot 5 = 180$. Cela entendu, voici les tranches des X:

PREMIÈRE TRANCHE.

$R^2=0$....	S=1 2 3 4 5 6	
$R^2=1$....	S=6 2 4 3 5 1	
$R^2=2$....	S=6 5 3 4 2 1	....R=0 5 5 0 5 0
$R^2=3$....	S=1 5 3 4 2 6	
$R^2=4$....	S=6 2 4 3 5 1	
$R^2=5$....	S=1 5 4 3 2 6	

2.e TRANCHE.

R^2=5.... S=1 2 3 4 5 6
R^2=1.... S=6 2 4 3 5 1
R^2=3.... S=6 5 3 4 2 1 ....R=1 1 4 4 1 4
R^2=2.... S=1 5 3 4 2 6
R^2=4.... S=6 2 4 3 5 1
R^2=0.... S=1 5 4 3 2 6

3.e TRANCHE.

R^2=5=4=2=3=1=0... S comme ci-devant... R=2 3 2 2 3 3

4.e TRANCHE.

R^2=0=4=2=3=1=5... S comme ci-devant... R=3 2 3 3 2 2

5.e TRANCHE.

R^2=5=1=3=2=4=0... S comme ci-devant... R=4 4 1 1 4 1

6.e TRANCHE.

R^2=0=4=3=2=1=5... S comme ci-devant... R=5 0 0 5 0 5

On formera la première bande avec le premier nombre de R^2, commun à cette bande. Ce nombre s'ajoute successivement avec tous les nombres de la première bande des S, et ceux de la valeur de R pour toutes bandes d'une même tranche. Ainsi pour la dernière tranche on aurait :

$R^2=0$: donc....	31	2	3	34	5	36=	111	3906
$R^2=4$, ou 144...	180	146	148	177	149	175=	975	
$R^2=3$, ou 108...	144	113	111	142	110	139=	759	
$R^2=2$, ou 72...	103	77	75	106	74	108=	543	
$R^2=1$, ou 36...	72	38	40	69	41	67=	327	
$R^2=5$, ou 180...	211	185	184	213	182	216=	1191	

Les tranches parallèles aux Y se déduisent facilement des précédentes, savoir : la première tranche, des premières bandes des six tranches ci-dessus ; la 2.e tranche, des secondes bandes, et ainsi de suite, les bandes toujours parallèles à l'intersection XY. Ainsi ces tranches seront :

1.re TRANCHE.

$R^2=0$.....	R=0	5	5	0	5	0	.....S=1 2 3 4 5 6
$R^2=5$.....	R=1	1	4	4	1	4	
$R^2=5$.....	R=2	3	2	2	3	3	
$R^2=0$.....	R=3	2	3	3	2	2	
$R^2=5$.....	R=4	4	1	1	4	1	
$R^2=0$.....	R=5	0	0	5	0	5	

2.e TRANCHE.

$R^2=1=1=4=4=1=4$...R comme ci-devant...S=6 2 4 3 5 1

3.e TRANCHE.

R^2=2=3=2=2=3=3... R comme devant... S=6 5 3 4 2 1

4.e TRANCHE.

R^2=3=2=3=3=2=2... R comme devant... S=1 5 3 4 2 6

5.e TRANCHE.

R^2=4=4=1=1=4=1... R comme devant... S=6 2 4 3 5 1

6.e TRANCHE.

R^2=5=0=0=5=0=5... R comme devant... S=1 5 4 3 2 6

Voici les tranches parallèles aux Z. Les bandes peuvent se prendre parallèlement à l'intersection XZ, ou à l'intersection YZ. On choisit ici les bandes parallèles à l'intersection X Z. La 6.e tranche que l'on cotera la 1.re, se compose de toutes les premières bandes verticales des X; la 5.e, qui sera la 2.e, des secondes bandes verticales, et ainsi de suite. Ces tranches seront donc :

1.re TRANCHE.

R=0......	R^2=0 1 2 3 4 5	
R=1......	R^2=5 1 3 2 4 0	
R=2......	R^2=5 4 2 3 1 0	......S=1 6 6 1 6 1
R=3......	R^2=0 4 2 3 1 5	
R=4......	R^2=5 1 3 2 4 0	
R=5......	R^2=0 4 3 2 1 5	

2.e TRANCHE.

R=5=1=3=2=4=0... R^2 comme devant... S=2 2 5 5 2 5

3.e TRANCHE.

R=5=4=2=3=1=0... R^2 comme devant... S=3 4 3 3 4 4

4.e TRANCHE.

R=0=4=2=3=1=5... R^2 comme devant... S=4 3 4 4 3 3

5.e TRANCHE.

R=5=1=3=2=4=0... R^2 comme devant... S=5 5 2 2 5 2

6.e TRANCHE.

R=0=4=3=2=1=5... R^2 comme devant... S=6 1 1 6 1 6

Il reste à voir les tranches diagonales.

On les déduirait très-facilement de celles des Y; mais, ne voulant faire découler toutes les tranches que de celles des X, voici comment on agirait :

Pour les tranches diagonales des X, la première se composera de bandes, savoir :

La 1.re bande, en prenant pour S le 1.er nombre de la diagonale, lequel sera commun à toute la bande; pour R^2 les nombres répondant à la 1.re bande de chaque tranche; et pour R les premiers nombres communs de chaque tranche.

La 2.e bande aura pour S le 2.e nombre de la diagonale, commun à toute la bande; pour R^2 les nombres répondant

à la 2.e bande de chaque tranche; et pour R les seconds nombres communs de chaque tranche. Il en sera de même pour les autres bandes.

Quant à la 2.e diagonale, elle se tire facilement de la première : les R^2 sont les mêmes que pour cette première; les R sont aussi les mêmes, mais il faut les prendre à compter de la dernière bande; les S sont ceux de la 2.e diagonale des X, ou les mêmes que ci-dessus, en remontant du dernier au premier nombre.

1.re TRANCHE DIAGONALE DES X.

S=1.....	R^2=0 5 5 0 5 0.....	R=0 1 2 3 4 5
S=2.....	R^2=1 1 4 4 1 4.....	R=5 1 3 2 4 0
S=3.....	R^2=2 3 2 2 3 3.....	R=5 4 2 3 1 0
S=4.....	R^2=3 2 3 3 2 2.....	R=0 4 2 3 1 5
S=5.....	R^2=4 4 1 1 4 1.....	R=5 1 3 2 4 0
S=6.....	R^2=5 0 0 5 0 5.....	R=0 4 3 2 1 5

2.e TRANCHE DIAGONALE DES X.

S=6....		R=0 4 3 2 1 5
S=5....		R=5 1 3 2 4 0
S=4....		R=0 4 2 3 1 5
S=3....	R^2 comme devant....	R=5 4 2 3 1 0
S=2....		R=5 1 3 2 4 0
S=1....		R=0 1 2 3 4 5

Pour les tranches diagonales des Z, on aura la première par les bandes, comme suit :

La 1.re bande est la 1.re de la 1.re tranche des X;

La 2.e est la 2.e de la 2.e tranche, et ainsi de suite.

La seconde tranche diagonale des Z s'obtient par les bandes, savoir :

La 1.re bande est la 1.re de la dernière tranche des X ;

La seconde est la 2.e de l'avant-dernière tranche des X, et ainsi de suite en remontant. Rien n'est donc plus facile que la formation de ces tranches diagonales.

Les tranches diagonales des Y se déduisent aisément des tranches des Z non diagonales, savoir :

La 1.re se compose de bandes, comme suit :

La 1.re bande est la dernière de la 1.re tranche des Z ;

La 2.e bande est l'avant-dernière de la 2.e tranche des Z, et ainsi de suite en continuant.

La 2.e tranche diagonale a ses bandes de cette manière :

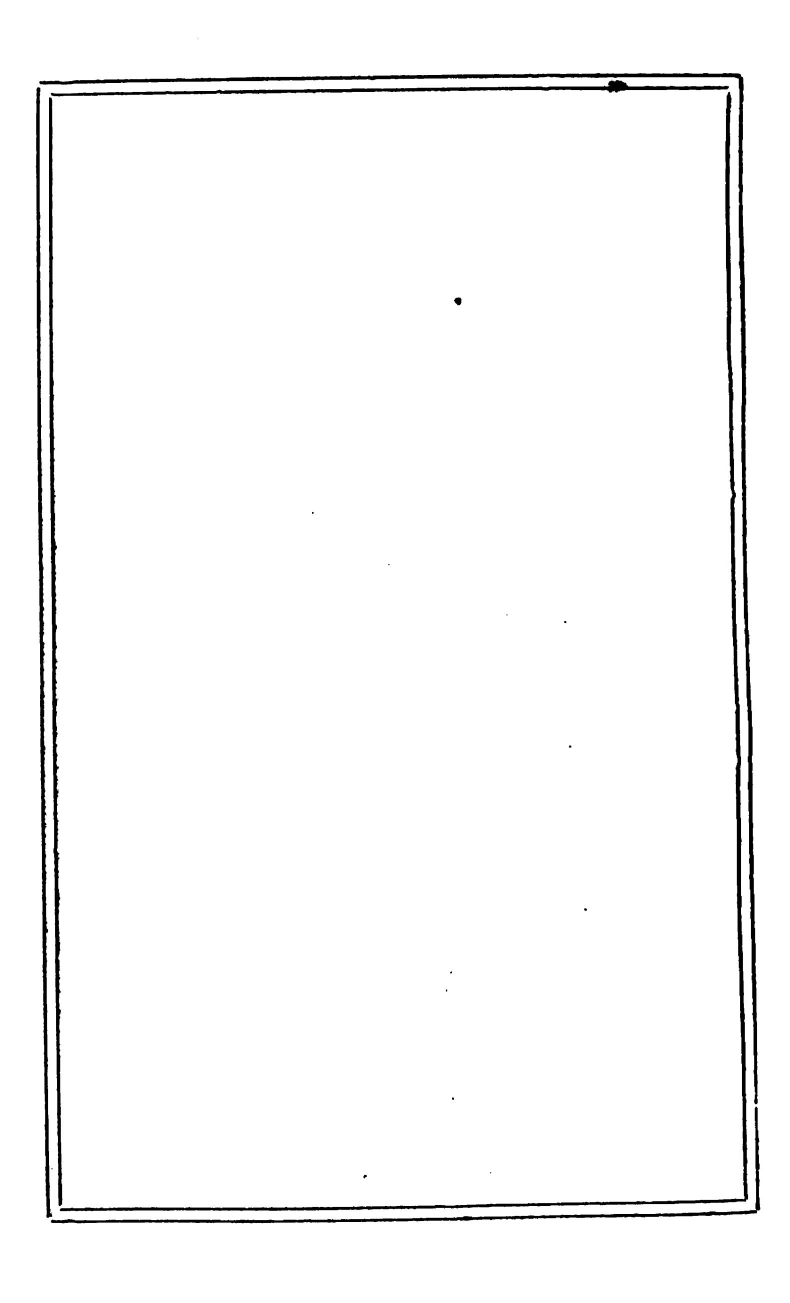
La 1.re est la 1.re de la 1.re tranche des Z ;

La 2.e est la 2.e de la 2.e tranche des Z, et ainsi de suite en continuant.

On agira de même quelle que soit la racine ; mais il peut y avoir encore d'autres dérivations faciles à saisir, et qui dépendent de la manière dont on a formé les tranches, attendu qu'on a pu les prendre parallèlement à telle ou telle intersection de deux plans.

On verra dans la théorie des parallélipipèdes une manière plus générale d'obtenir les cubes magiques.





TRAITÉ
DES PARALLÉLIPIPÈDES
MAGIQUES.

On sait qu'un parallélipipède est un corps terminé par six parallélogrammes parallèles deux à deux. Un parallélipipède magique serait celui dont toutes les bandes des tranches parallèles auraient une même somme.

Pour qu'un parallélipipède puisse être magique, il ne suffit pas que le nombre des termes d'une progression arithmétique soit décomposable en trois facteurs, dont deux peuvent d'ailleurs être égaux : il faut de plus que ce nombre, s'il est pair, n'ait point de facteurs impairs. Ainsi $30=2\cdot 3\cdot 5$ ne peut donner un parallélipipède magique : car, chaque nombre valant $\frac{31}{2}$, des termes en nombre impair donneraient une somme fractionnaire. Il en serait de même de $24=2\cdot 4\cdot 3$. Au contraire, $48=2\cdot 4\cdot 6$ aurait bien $\frac{49}{2}$ pour valeur de chaque nombre; mais, les facteurs étant tous pairs, $\frac{49}{2}$ serait multiplié par un pair, ce qui donnerait une somme entière.

Nous ne prétendons pas donner ici un traité complet sur les parallélipipèdes, avec d'autant plus de raison que, les nombres devenant très-grands, les détails seraient fatigans. En effet le plus petit nombre composé de trois facteurs inégaux impairs est $105=3 \cdot 5 \cdot 7$, et la construction serait pénible et assez difficile.

Nous appellerons parallélipipèdes pairs ou impairs ceux qui résulteraient d'un nombre pair ou impair de termes de la progression. Nous n'emploierons que la progression naturelle des nombres, à commencer par l'unité, ainsi que nous l'avons pratiqué dans tout ce qui précède. Si elle était différente, il n'y aurait qu'à substituer les termes de cette dernière progression à ceux de la première.

Comme il n'y a point de tranches diagonales dans un parallélipipède, il est indifférent qu'une base carrée ait ou non ses diagonales exactes. Ainsi, pourvu qu'une progression interrompue ait la même différence, les intervalles peuvent être inégaux. Soit, par exemple, la progression interrompue $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 7 \cdot 8 \cdot 9 \ldots 20 \cdot 21 \cdot 22$: la somme totale est $6+24+63=93$; chaque ligne du carré doit avoir 31. Voici ce carré :

21	1	9
3	8	20
7	22	2

On voit que la 2.e diagonale n'est pas exacte; mais les horizontales et les verticales ont la somme voulue. Généralement, soient $a\,b\,c$ les premiers termes des trois progressions partielles, m la différence commune : les termes seront $a, a+m, a+2m \ldots b, b+m, b+2m \ldots c, c+m, c+2m$; et le carré devient :

$c+m$	a	$b+2m$
$a+2m$	$b+m$	c
b	$c+2m$	$a+m$

Chaque ligne du carré a pour somme $a+b+c+3m$, à l'exception de la 2.e diagonale, qui a $3b+3m$. Ce qui vient d'être dit trouvera son application plus bas.

Voyons d'abord les parallélipipèdes pairs.

ARTICLE PREMIER.

PARALLÉLIPIPÈDES PAIRS.

PARALLÉLIPIPÈDE DE 48.

Comme $48=2\cdot4\cdot6$, il y aura des tranches qui n'auront que 2 sur 4, et 2 sur 6; et, puisque ces tranches peuvent être considérées comme des parallélogrammes, il est nécessaire que deux nombres aient pour somme 49, ou un nombre et son complément. Donc dans la composition de la tranche de 4 sur 6 il ne doit entrer aucun nombre avec son complément.

Soient ces six bandes de 4 cases les suivantes:

48	45	2	3
44	41	6	7
40	37	10	11
36	33	14	15
32	29	18	19
28	25	22	23

On peut remarquer, dans le choix de cette composition,

qu'elle est symétrique d'après le tableau qu'on aurait formé des nombres et des complémens : ainsi, ayant fait la bande de 4 cases 48, 45, 2, 3, les suivantes vont en diminuant de 4 unités pour les grands nombres, et augmentant de 4 unités pour les petits.

La seconde tranche complémentaire comprendrait les nombres :

1	4	47	46
5	8	43	42
9	12	39	38
13	16	35	34
17	20	31	30
21	24	27	26

Cette composition est aussi facile que la précédente; mais il n'est pas nécessaire de s'occuper de ces dernières bandes, puisqu'elles dérivent naturellement des premières.

Maintenant il faut choisir un nombre de chaque bande de 4 pour obtenir 147=49·3, ou les bandes de 6 cases, qui peuvent être

48	45	2	3
6	7	44	41
37	40	11	10
15	14	36	33
19	18	29	32
22	23	25	28

Le parallélipipède est achevé, puisque la 2.e tranche contiendra les complémens de celle qui précède.

Quant aux combinaisons pour la composition précédente fixe, on doit remarquer qu'on peut alterner les verticales à volonté, ce qui donnera 1·2·3·4=24 combi-

naisons; mais à chacune d'elles les horizontales peuvent alterner de 1·2·3·4·5·6=720, et en tout 720·24, qu'il faudrait diviser par 4 pour avoir les positions réellement différentes : il viendra donc 720·6=4320 manières de distribuer ces bandes. Il faut bien se garder de faire passer un nombre d'une bande dans une autre.

Quant à mettre les bandes complémentaires dans la première tranche, et les précédentes dans la seconde, ce n'est qu'un autre changement de position auquel on ne doit pas avoir égard, et cela se pratiquera ainsi toutes les fois qu'un parallélogramme n'aura que deux cases à l'un de ses côtés.

Il y aurait une foule d'autres compositions des bandes d'une des deux tranches, et autant de fois il viendrait 4320.

On pourrait, par exemple, choisir les bandes

48	2	3	45		48	45	3	2
44	6	10	38		6	10	38	44
41	9	15	33		33	41	9	15
42	12	19	25	et en tirer...	25	12	42	19
36	26	14	22		14	22	26	36
17	31	29	21		21	17	29	31

et ainsi de suite.

PARALLÉLIPIPÈDE DE 96.

Soit la décomposition de 96 dans les 3 facteurs 4, 4, 6. On ne s'occupe pas des décompositions 2, 6, 8... 2, 4, 12 : car on a vu par ce qui précède la manière d'opérer lorsqu'un des facteurs est 2; on ne peut d'ailleurs avoir pour facteur 3, qui est impair.

Chaque nombre vaut $\frac{97}{2}$=48,5. Pour avoir les carrés qui satisfont au problème proposé, on agira comme suit :

On fera le tableau des progressions ayant pour différence l'unité; on mettra à côté leur somme, et à droite un chiffre qui indique l'ordre de ces progressions.

10.....	1 . 2 . 3 . 4.....	1
26.....	5 . 6 . 7 . 8.....	2
42.....	9 . 10 . 11 . 12.....	3
58.....	13 . 14 . 15 . 16.....	4
74.....	17 . 18 . 19 . 20.....	5
90.....	21 . 22 . 23 . 24.....	6
106.....	25 . 26 . 27 . 28.....	7
122.....	29 . 30 . 31 . 32.....	8
138.....	33 . 34 . 35 . 36.....	9
154.....	37 . 38 . 39 . 40.....	10
170.....	41 . 42 . 43 . 44.....	11
186.....	45 . 46 . 47 . 48.....	12
202.....	49 . 50 . 51 . 52.....	13
218.....	53 . 54 . 55 . 56.....	14
234.....	57 . 58 . 59 . 60.....	15
250.....	61 . 62 . 63 . 64.....	16
266.....	65 . 66 . 67 . 68.....	17
282.....	69 . 70 . 71 . 72.....	18
298.....	73 . 74 . 75 . 76.....	19
314.....	77 . 78 . 79 . 80.....	20
330.....	81 . 82 . 83 . 84.....	21
346.....	85 . 86 . 87 . 88.....	22
362.....	89 . 90 . 91 . 92.....	23
378.....	93 . 94 . 95 . 96.....	24

On voit que la valeur de chaque progression partielle excède la précédente de 16 unités. Maintenant, au lieu d'agir sur ces progressions, on peut ne considérer que les nombres qui en tiennent lieu, et qui indiquent leur ordre. Si donc on cherche toutes les combinaisons de ces nombres propres à donner pour somme $50 = \frac{25}{2} \cdot 4$, on aura autant de carrés, parmi lesquels on ne pourra choisir que ceux qui ne comprennent pas les mêmes nombres. On substituera ensuite les progressions partielles à ces nombres; et, les carrés convenables étant formés, il n'y aura plus qu'à chercher les bandes de 6 tirées de ces carrés, et propres à satisfaire à la question. Si les progressions adoptées ne pouvaient fournir les bandes, il faudrait prendre d'autres carrés. On verra tout à l'heure la manière d'arriver plus promptement au résultat cherché.

Voici toutes les combinaisons des 24 nombres propres à donner 50. Le premier nombre n'est pas répété lorsqu'il est commun à plusieurs combinaisons; il en est de même du second, pour les combinaisons dont il fait partie.

24	23	1	2
	22	1	3
	21	1	4
		2	3
	20	1	5
		2	4
	19	1	6
		2	5
		3	4
	18	1	7
		2	6
		3	5
	17	1	8
		2	7
		3	6
		4	5
	16	1	9
		2	8
		3	7
		4	6
	15	1	10
		2	9
		3	8
		4	7
		5	6
	14	1	11
		2	10
		3	9
		4	8
		5	7
	13	1	12
		2	11
		3	10
		4	9
		5	8
		6	7
	12	3	11
		4	10
		5	9
		6	8
	11	5	10
		6	9
		7	8
	10	7	9

23	22	1	4
		2	3
	21	1	5
		2	4
	20	1	6
		2	5
		3	4
	19	1	7
		2	6
		3	5
	18	1	8
		2	7
		3	6
		4	5
	17	1	9
		2	8
		3	7
		4	6
	16	1	10
		2	9
		3	8
		4	7
		5	6
	15	1	11
		2	10
		3	9
		4	8
		5	7
	14	1	12
		2	11
		3	10
		4	9
		5	8
		6	7
	13	2	12
		3	11
		4	10
		5	9
		6	8
	12	4	11
		5	10
		6	9
		7	8
	11	6	10
		7	9
	10	8	9

22	21	1	6
		2	5
		3	4
	20	1	7
		2	6
		3	5
	19	1	8
		2	7
		3	6
		4	5
	18	1	9
		2	8
		3	7
		4	6
	17	1	10
		2	9
		3	8
		4	7
		5	6
	16	1	11
		2	10
		3	9
		4	8
		5	7
	15	1	12
		2	11
		3	10
		4	9
		5	8
		6	7
	14	1	13
		2	12
		3	11
		4	10
		5	9
		6	8
	13	3	12
		4	11
		5	10
		6	9
		7	8
	12	5	11
		6	10
		7	9
	11	7	10
		8	9

21	20	1	8
		2	7
		3	6
		4	5
	19	1	9
		2	8
		3	7
		4	6
	18	1	10
		2	9
		3	8
		4	7
		5	6
	17	1	11
		2	10
		3	9
		4	8
		5	7
	16	1	12
		2	11
		3	10
		4	9
		5	8
		6	7
	15	1	13
		2	12
		3	11
		4	10
		5	9
		6	8
	14	2	13
		3	12
		4	11
		5	10
		6	9
		7	8
	13	4	12
		5	11
		6	10
		7	9
	12	6	11
		7	10
		8	9
	11	8	10

20	19	1	10
		2	9
		3	8
		4	7
		5	6
	18	1	11
		2	10
		3	9
		4	8
		5	7
	17	1	12
		2	11
		3	10
		4	9
		5	8
		6	7
	16	1	13
		2	12
		3	11
		4	10
		5	9
		6	8
	15	1	14
		2	13
		3	12
		4	11
		5	10
		6	9
		7	8
	14	3	13
		4	12
		5	11
		6	10
		7	9
	13	5	12
		6	11
		7	10
		8	9
	12	7	11
		8	10
	11	9	10

19	18	1	12
		2	11
		3	10
		4	9
		5	8
		6	7
	17	1	13
		2	12
		3	11
		4	10
		5	9
		6	8
	16	1	14
		2	13
		3	12
		4	11
		5	10
		6	9
		7	8
	15	2	14
		3	13
		4	12
		5	11
		6	10
		7	9
	14	4	13
		5	12
		6	11
		7	10
		8	9
	13	6	12
		7	11
		8	10
	12	8	11
		9	10

18	17	1	14
		2	13
		3	12
		4	11
		5	10
		6	9
		7	8
	16	1	15
		2	14
		3	13
		4	12
		5	11
		6	10
		7	9
	15	3	14
		4	13
		5	12
		6	11
		7	10
		8	9
	14	5	13
		6	12
		7	11
		8	10
	13	7	12
		8	11
		9	10
	12	9	11

17	16	2	15
		3	14
		4	13
		5	12
		6	11
		7	10
		8	9
	15	4	14
		5	13
		6	12
		7	11
		8	10
	14	6	13
		7	12
		8	11
		9	10
	13	8	12
		9	11
	12	10	11

16	15	5	14
		6	13
		7	12
		8	11
		9	10
	14	7	13
		8	12
		9	11
	13	9	12
		10	11

15	14	8	13
		9	12
		10	11
	13	10	12

14	13	11	12

Maintenant, pour obtenir toutes les combinaisons propres à donner les six carrés cherchés, il faut comparer chacune de celles où entre 24, avec celles où n'entre aucun des quatre nombres qui la composent, mais seulement avec

celles qui comprennent les plus grands nombres après ceux qui en font partie. Ainsi, qu'on choisisse la première combinaison où entre 24, et qui est 24, 23, 1, 2; on aura :

	22	21	3	4
	22	20	3	5
	22	19	3	6
	22	19	4	5
	22	18	3	7
	22	18	4	6
	22	17	3	8
	22	17	4	7
	22	17	5	6
	22	16	3	9
	22	16	4	8
	22	16	5	9
	22	15	3	10
	22	15	4	9
24 23 1 2	22	15	5	8
	22	15	6	7
	22	14	3	11
	22	14	4	10
	22	14	5	9
	22	14	6	8
	22	13	3	12
	22	13	4	11
	22	13	5	10
	22	13	6	9
	22	13	7	8
	22	12	5	11
	22	12	6	10
	22	12	7	9
	22	11	7	10
	22	11	8	9

Agissant de même, en prenant la première de ces dernières combinaisons comparée à celles où n'entrent point les nombres qui la composent, non plus que ceux de celle précédemment choisie, dont 24 fait partie, il viendra :

24 23 1 2...22 21 3 4	20	19	5	6
	20	18	5	7
	20	17	5	8
	20	17	6	7
	20	16	5	9
	20	16	6	8
	20	15	5	10
	20	15	6	9
	20	15	7	8
	20	14	5	11
	20	14	6	10
	20	14	7	9
	20	13	5	12
	20	13	6	11
	20	13	7	10
	20	13	8	9
	20	12	7	11
	20	12	8	10
	20	11	9	10

Retenant la première des combinaisons ci-dessus, et agissant comme pour les précédentes, il viendra :

24 23 1 2...22 21 3 4...20 19 5 6 {
18 17 7 8
18 16 7 9
18 15 7 10
18 15 8 9
18 14 7 11
18 14 8 10
18 13 7 12
18 13 8 11
18 13 9 10
18 12 9 11

La première de celles-ci donnera :

24 23 1 2....... 22 21 3 4
20 19 5 6....... 18 17 7 8 {
16 15 9 10
16 14 9 11
16 13 9 12
16 13 10 11

Enfin, prenant 16, 15, 9, 10, il ne restera que 11, 12, 13, 14, et les carrés seront en conséquence :

24 23 1 2.....22 21 3 4.....20 19 5 6.....
18 17 7 8.....16 15 9 10.....14 13 11 12

Substituant les progressions, et faisant les carrés par la méthode expéditive, on aura :

1	95	94	4		9	87	86	12		17	79	78	20
92	6	7	89		84	14	15	81		76	22	23	73
8	90	91	5		16	82	83	13		24	74	75	21
93	3	2	96		85	11	10	88		77	19	18	80

25	71	70	28		33	63	62	36		41	55	54	44
68	30	31	65		60	38	39	57		52	46	47	49
32	66	67	29		40	58	59	37		48	50	51	45
69	27	26	72		61	35	34	64		53	43	42	56

Ce choix de progressions partielles est remarquable : car on voit que les deux lignes du milieu des carrés sont complémens l'une de l'autre, ainsi que les première et dernière. Il suffit donc d'avoir deux tranches pour obtenir les deux autres, savoir : l'une du milieu, et l'une des extrêmes. Il y a plus : ayant une bande de chacune des deux tranches, on aura les trois autres, en prenant dans le même ordre les trois autres bandes : ainsi, ayant trouvé que 1, 84, 76, 32, 57, 41, donnaient $291 = 97 \cdot 3$, valeur des six cases d'une bande, on aura de suite les trois autres, savoir :

1	95	94	4
84	14	15	81
76	22	23	73
32	66	67	29
57	39	38	60
41	55	54	44

Ayant de même obtenu 92, 9, 77, 25, 36, 52, les trois autres bandes seront :

92	6	7	89
9	87	86	12
77	19	18	80
25	71	70	28
36	62	63	33
52	46	47	49

Les complémens de cette dernière tranche sont :

8	90	91	5
85	11	10	88
17	79	78	20
69	27	26	72
64	34	35	61
48	50	51	45

Et les complémens de la première tranche :

93	3	2	96
16	82	83	13
24	74	75	21
68	30	31	65
37	59	58	40
53	43	42	56

On pourrait, d'après les carrés, faire ceux des différences, qui seraient :

+ 47,5	— 46,5	— 45,5	+ 44,5
— 43,5	+ 42,5	+ 41,5	— 40,5
+ 40,5	— 41,5	— 42,5	+ 43,5
— 44,5	+ 45,5	+ 46,5	— 47,5

et ainsi des autres, ce qui faciliterait la composition des bandes de 6 cases.

Comme on peut alterner à volonté les horizontales et les verticales des carrés partiels, on est libre de placer comme on veut le premier carré; mais, une fois établi, ce seront les bandes de 6 cases qui fixeront les autres carrés, dont le rang est d'ailleurs arbitraire. Ainsi, le premier carré étant placé comme il est donné ci-dessus, on mettra dessous, pour avoir une bande de 6, les nombres qui

doivent répondre à une des cases de ce carré de 4. Par exemple, sous 7, on voit qu'il faudra 86, 18, 70, 63, 47; ces cinq nombres se placent arbitrairement dans la bande; mais, une fois placés, les carrés de 4 ont leur place fixée. Tout dépendra donc de ce premier carré de 4, et d'une première bande de 6. Que de combinaisons pour un seul cas! Et si l'on choisit d'autres systèmes de carrés, d'après la marche suivie pour celui qu'on a examiné, que de nouvelles combinaisons!

On s'est étendu beaucoup sur la méthode à employer, pour faire voir les simplifications que l'on doit adopter dans tous les cas semblables à celui que l'on vient de discuter, c'est-à-dire lorsque la base du parallélipipède est un carré dont la racine est 4 ou un de ses multiples.

CUBE DE 4.

Le cube étant lui-même un parallélipipède dont toutes les faces sont égales, la méthode précédente lui est applicable. Soit donc le cube de 4=64 : chaque bande doit avoir 65 • 2 = 130. Soient en différences les 4 carrés suivans :

+31,5—30,5—29,5+28,5	+23,5—22,5—21,5+20,5
—27,5+26,5+25,5—24,5	—19,5+18,5+17,5—16,5
+24,5—25,5—26,5+27,5	+16,5—17,5—18,5+19,5
—28,5+29,5+30,5—31,5	—20,5+21,5+22,5—23,5

+15,5—14,5—13,5+12,5	+ 7,5— 6,5— 5,5+ 4,5
—11,5+10,5+ 9,5— 8,5	— 3,5+ 2,5+ 1,5— 0,5
+ 8,5— 9,5—10,5+11,5	+ 0,5— 1,5— 2,5+ 3,5
—12,5+13,5+14,5—15,5	— 4,5+ 5,5+ 6,5— 7,5

On en tirera aisément ceux qui doivent former le cube, et qui seraient

+31,5—19,5—12,5+ 0,5	—27,5+23,5+ 8,5— 4,5
—30,5+18,5+13,5— 1,5	+26,5—22,5— 9,5+ 5,5
—29,5+17,5+14,5— 2,5	+25,5—21,5—10,5+ 6,5
+28,5—16,5—15,5+ 3,5	—24,5+20,5+11,5— 7,5

+24,5—20,5—11,5+ 7,5	—28,5+16,5+15,5— 3,5
—25,5+21,5+10,5— 6,5	+29,5—17,5—14,5+ 2,5
—26,5+22,5+ 9,5— 5,5	+30,5—18,5—13,5+ 1,5
+27,5—23,5— 8,5+ 4,5	—31,5+19,5+12,5— 0,5

On voit que les deux derniers sont complémens des premiers, et l'on aurait en nombres :

1 63 62 4	9 55 54 12	17 47 46 20	25 39 38 28
60 6 7 57	52 14 15 49	44 22 23 41	36 30 31 33
8 58 59 5	16 50 51 13	24 42 43 21	32 34 35 29
61 3 2 64	53 11 10 56	45 19 18 48	37 27 26 40

d'où l'on tire

1 52 45 32	60 9 24 37	8 53 44 25	61 16 17 36
63 14 19 34	6 55 42 27	58 11 22 39	3 50 47 30
62 14 18 35	7 54 43 26	59 10 23 38	2 51 46 31
4 49 48 29	57 12 21 40	5 56 41 28	64 13 20 33

Ayant donc placé à volonté, c'est-à-dire dans le sens qu'on jugera à propos de choisir, l'un des quatre premiers carrés, le premier, par exemple, les quatre derniers indiquent de quelle manière on doit disposer les trois autres pour avoir des bandes et des tranches convenables.

Il est à remarquer que les cubes obtenus de cette manière sont plus magiques que ceux construits par les méthodes données : car, dans ces derniers, les tranches sont

bien régulières, mais les bandes ne contiennent pas la même somme, ce qui a lieu ici; les tranches diagonales sont exactes dans celui que nous venons de former, puisque toutes les bandes ont même somme. Cette construction est très-remarquable.

PARALLÉLIPIPÈDE DE 192.

Comme $192 = 4 \cdot 6 \cdot 8$, on peut faire 12 carrés de 4, ou en joindre deux qui donneront en conséquence un parallélogramme de 4 sur 8. Chaque ligne de 4 vaut $2 \cdot 193 = 386$. Chaque ligne de 8 aura 772. Les bandes de 6 auront $3 \cdot 193 = 579$. Soient les carrés de 4 :

1	191	190	4	9	183	182	12
188	6	7	185	180	14	15	177
8	186	187	5	16	178	179	13
189	3	2	192	181	11	10	184
17	175	174	20	25	167	166	28
172	22	23	169	164	30	31	161
24	170	171	21	32	162	163	29
173	19	18	176	165	27	26	168
33	159	158	36	41	151	150	44
156	38	39	153	148	46	47	145
40	154	155	37	48	146	147	45
157	35	34	160	149	43	42	152
49	143	142	52	57	135	134	60
140	54	55	137	132	62	63	129
56	138	139	53	64	130	131	61
141	51	50	144	133	59	58	136

65	127	126	68	73	119	118	76
124	70	71	121	116	78	79	113
72	122	123	69	80	114	115	77
125	67	66	128	117	75	74	120

81	111	110	84	89	103	102	92
108	86	87	105	100	94	95	97
88	106	107	85	96	98	99	93
109	83	82	112	101	91	90	104

Ces carrés sont faits avec huit nombres qui se suivent, et leurs complémens. Chacun de ces carrés aura les deux lignes du milieu complémentaires. Il en sera de même des première et dernière. Il suffit donc d'obtenir les bandes de 6 correspondantes aux deux premières lignes du 1.er carré, et l'on aura de suite les bandes qui correspondent aux deux autres. Il y a plus : il suffit d'avoir les bandes qui répondent aux deux premiers nombres du premier carré, pour avoir les quatorze autres. Ainsi, ayant 1, 172, 36, 137, 125, 108, on aura pour 191 la bande 191, 22, 158, 55, 67, 86; pour 190 il viendra 190, 23, 159, 54, 66, 87; enfin pour 4 la bande sera 4, 169, 33, 140, 128, 105, qu'on peut arranger comme ci-dessous. On observera que l'on suit l'ordre de la première bande : de sorte que 22, 23, 169, qui viennent après 172, sont les seconds des trois bandes. Si la première bande comprend un nombre qui soit le dernier de l'une des lignes d'un carré, les suivans se placent aussi par ordre, en allant de droite à gauche. Ainsi, après 36, il faudra, pour les trois autres bandes, prendre 158, 159, 33.

1	172	36	137	125	108
191	22	158	55	67	86
190	23	159	54	66	87
4	169	33	140	128	105

Si 188 se compose par 188, 29, 45, 133, 80, 104, on aura :

188	29	45	133	80	104
6	163	147	59	114	90
7	162	146	58	115	91
185	32	48	136	77	101

On tire de ces bandes les complémentaires ainsi qu'on l'a dit plus haut.

8	161	145	57	116	92	189	24	160	53	65	88
186	31	47	135	78	102	3	170	34	139	127	106
187	30	46	134	79	103	2	171	35	138	126	107
5	164	148	60	113	89	192	21	157	56	68	85

Il en sera de même de l'autre carré qui complète le parallélogramme de 8. Toute la difficulté consiste donc à obtenir les bandes pour 1, 188, 9, 180. Ces quatre obtenues, on aura immédiatement les vingt-huit autres.

ARTICLE II.

PARALLÉLIPIPÈDES IMPAIRS.

CUBE DE 3.

Pour arriver plus promptement, qu'on fasse les groupes de 3 nombres, comme ci-après, mettant un numéro d'ordre à chacun d'eux.

1	2	3	= 6	......	1
4	5	6	= 15	......	2
7	8	9	= 24	......	3
10	11	12	= 33	......	4
13	14	15	= 42	......	5
16	17	18	= 51	......	6
19	20	21	= 60	......	7
22	23	24	= 69	......	8
25	26	27	= 78	......	9

Il faut partager ces neuf groupes en 3 parties ayant même somme, en opérant sur les numéros d'ordre. Or la somme de ces derniers est 45, dont le tiers est 15 : on peut donc avoir 2, 4, 9.... 1, 6, 8.... 3, 5, 7. Substituant les groupes à ces numéros d'ordre, on aura les trois carrés

26	4	12		23	1	18		20	7	15
6	11	25		3	17	22		9	14	19
10	27	5		16	24	2		13	21	8

Pour avoir les bandes qui doivent compléter le cube, comme la somme des 9 cases de chaque carré = 126, chaque bande aura 42; ce que l'on peut obtenir de la manière suivante :

26	3	13		6	16	20		10	23	9
4	17	21		11	24	7		27	1	14
12	22	8		25	2	15		5	18	19

Ainsi, le premier carré étant fait et placé, les deux qui doivent être dessous ont leurs bandes fixées, et le cube sera plus magique que ceux qui sont formés par les méthodes données : car les bandes des tranches ou des carrés sont aussi égales, ce qui n'a pas lieu dans les cubes ma-

giques ordinaires. Il est clair que les tranches diagonales sont, par cette raison, aussi magiques.

PARALLÉLIPIPÈDE DE 45.

Il est clair que, la décomposition étant 3, 3, 5, le parallélipipède aura des tranches carrées, et que les autres seront de 3 sur 5.

Faisant encore 15 couples de 3 d'après la méthode indiquée ci-dessus, on aura :

1	2	3	=	6......	1
4	5	6	=	15......	2
7	8	9	=	24......	3
10	11	12	=	33......	4
13	14	15	=	42......	5
16	17	18	=	51......	6
19	20	21	=	60......	7
22	23	24	=	69......	8
25	26	27	=	78......	9
28	29	30	=	87......	10
31	32	33	=	96......	11
34	35	36	=	105......	12
37	38	39	=	114......	13
40	41	42	=	123......	14
43	44	45	=	132......	15

Opérant sur les numéros d'ordre, pour les diviser en 5 parties égales, on pourra avoir 1, 11, 12.... 5, 9, 10.... 4, 6, 14.... 2, 7, 15.... 3, 8, 13. Substituant les groupes, et formant les carrés de 3, il viendra :

35	1	33	29	13	27	41	10	18	44	4	21	38	7	24
3	32	34	15	26	28	12	17	40	6	20	43	9	23	37
31	36	2	25	30	14	16	42	11	19	45	5	22	39	8

Comme il faut 115 à chaque bande de 5, on prendra un nombre de chaque carré, de manière à obtenir cette somme, et l'on aurait :

2	28	40	6	39	36	26	11	19	23	31	15	18	44	7
34	27	12	20	22	32	13	16	45	9	3	29	41	4	38
33	14	17	43	8	1	30	42	5	37	35	25	10	21	24

Il est facile maintenant de faire le parallélipipède.

Si l'on veut connaître tous les systèmes de composition des cinq carrés de 3, on opèrera comme suit :

La somme des termes de la progression de 1 à 15 est 120, dont le 5.e = 24. Il faut donc d'abord chercher toutes les manières de faire 24 avec 3 termes de la progression de 1 à 15, ce qu'on obtient aisément par le *tableau que* voici :

15	8	1	13	10	1	11	10	3
	7	2		9	2		9	4
	6	3		8	3		8	5
	5	4		7	4		7	6
				6	5			
14	9	1	12	11	1	10	9	5
	8	2		10	2		8	6
	7	3		9	3	9	8	7
	6	4		8	4			
				7	5			

En tout, 25 manières d'obtenir 24 avec 3 termes de la progression naturelle poussée à 15. C'est ce qu'aurait donné

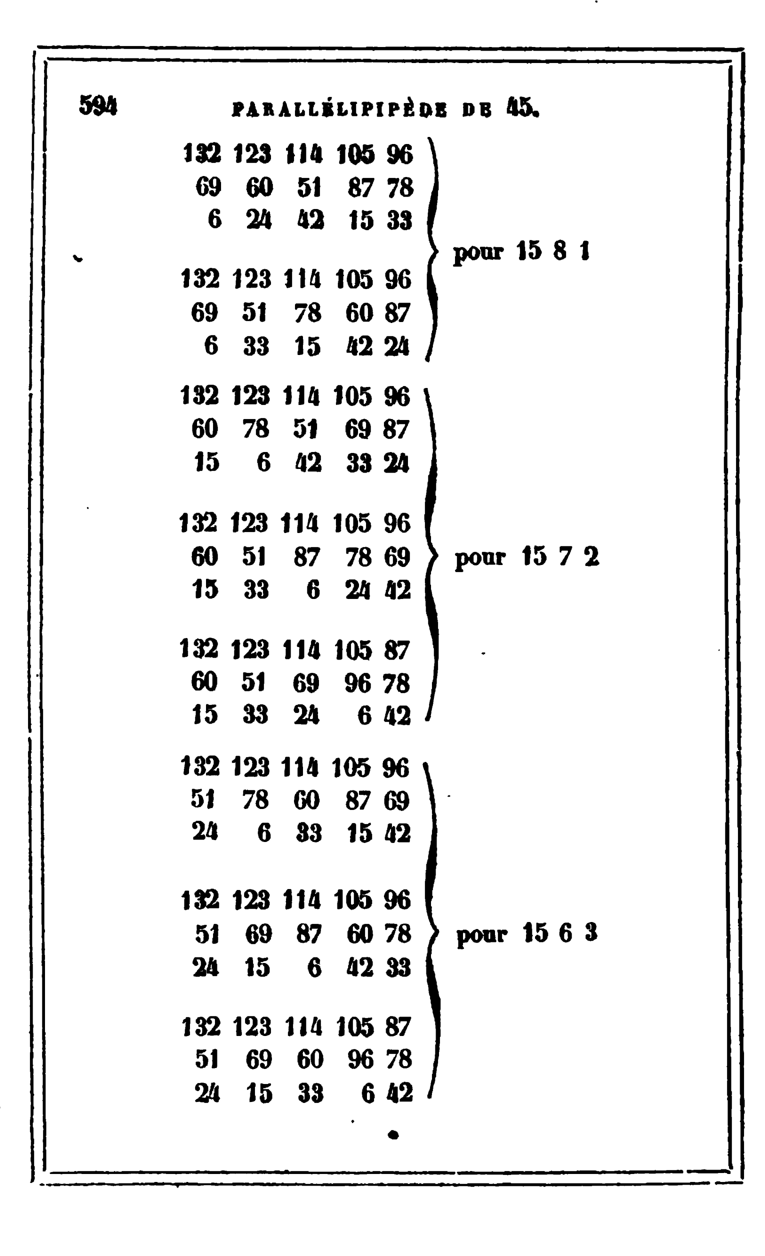
la formule d'Euler. Mais ce qu'on n'aurait pu en tirer, c'est le nombre de systèmes de combinaisons de cinq de ces groupes, qui doivent comprendre les 15 termes de la progression. Voici le tableau de ces systèmes.

15 8 1	14 7 3	13 9 2		
		13 6 5	12 10 2	11 9 4
	14 6 4	13 9 2	12 7 5	11 10 3
15 7 2	14 9 1	13 8 3		
		13 6 5	12 8 4	11 10 3
	14 6 4	13 10 1	12 9 3	11 8 5
		13 8 3	12 11 1	10 9 5
15 6 3	14 9 1	13 7 4	12 10 2	11 8 5
	14 8 2	13 10 1	12 7 5	11 9 4
		13 7 4	12 11 1	10 9 5
15 5 4	14 9 1	13 8 3	12 10 2	11 7 6
	14 8 2	13 10 1	12 9 3	11 7 6
	14 7 3	13 10 1		
		13 9 2	12 11 1	10 8 6

En tout, onze systèmes.

Pour obtenir ces systèmes, il est clair qu'il faut comparer les quatre groupes dont 15 fait partie, avec ceux où il n'entre pas, mais qui comprennent 14, comme on le voit au tableau, ayant soin de ne pas employer ces derniers lorsqu'il y entre des nombres d'un groupe comprenant 15. On prendra ensuite ceux où entre 13, sans y comprendre ceux qui retiennent des nombres des deux précédens groupes, et ainsi de suite.

Substituant les sommes des progressions partielles de 3 termes aux numéros d'ordre, on aura :



132	123	114	105	96	
69	60	51	87	78	
6	24	42	15	33	
					pour 15 8 1
132	123	114	105	96	
69	51	78	60	87	
6	33	15	42	24	
132	123	114	105	96	
60	78	51	69	87	
15	6	42	33	24	
132	123	114	105	96	
60	51	87	78	69	pour 15 7 2
15	33	6	24	42	
132	123	114	105	87	
60	51	69	96	78	
15	33	24	6	42	
132	123	114	105	96	
51	78	60	87	69	
24	6	33	15	42	
132	123	114	105	96	
51	69	87	60	78	pour 15 6 3
24	15	6	42	33	
132	123	114	105	87	
51	69	60	96	78	
24	15	33	6	42	

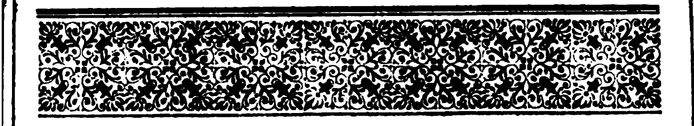
132	123	114	105	96	pour 15 5 4
42	78	69	87	60	
33	6	24	15	51	
132	123	114	105	96	
42	69	87	78	60	
33	15	6	24	51	
132	123	114	105	87	
42	60	78	96	69	
33	24	15	6	51	

Nous avons déjà donné un des systèmes. Voyons-en un autre pour 15 5 4, et choisissons le premier; les carrés seront, en substituant les progressions aux sommes :

44	10	15	pour 132 42 33
12	14	43	
13	45	11	
41	1	27	pour 123 78 6
3	26	40	
25	42	2	
38	7	24	pour 114 69 24
9	23	37	
22	39	8	
35	4	30	pour 105 87 15
6	29	34	
28	36	5	
32	16	21	pour 96 60 51
18	20	31	
19	33	17	

On ne poussera pas plus loin les recherches sur la construction des parallélipipèdes. Ce supplément est déjà trop étendu. Notre but était d'indiquer une des méthodes d'abréviation, commode et facile. Comme aucun auteur ne s'est occupé des solides, et ne voulant rien omettre dans le traité spécial que nous offrons au public, nous avons pensé qu'il lui serait agréable de trouver ici quelques données bien propres à exciter la curiosité, et à faciliter de nouvelles investigations.





ESSAI

SUR LES

CERCLES MAGIQUES.

Si l'on divise une circonférence en autant de parties qu'il y a d'unités dans un nombre composé de deux facteurs, tous deux pairs ou tous deux impairs; qu'on mène des rayons aux points de division; qu'on trace des cercles concentriques en nombre égal à celui d'un des facteurs, le cercle sera magique si, faisant mouvoir sur lui un autre cercle percé d'ouvertures, les nombres qui se montrent par ces ouvertures ont tous une même somme.

D'après la définition précédente, il est clair qu'on ne peut disposer dans un cercle que des carrés ou des parallélogrammes; on n'emploiera que la progression naturelle des nombres. On sait que si elle est différente, il n'y a que des substitutions à faire.

ARTICLE PREMIER.

LES NOMBRES SONT DES CARRÉS.

LE NOMBRE DONNÉ EST 9.

La circonférence doit se diviser en neuf parties; on se servira, pour opérer les divisions, indépendamment des moyens géométriques, d'une table des cordes, ou d'un compas de proportion, ce qui est moins exact; et à défaut, d'une table de sinus naturels, et même d'une table de logarithmes de sinus. Ici l'arc est de 40°. Le carré de 3 est

8 1 6
3 5 7
4 9 2

On peut distribuer dans la couronne extérieure ce carré, dont les horizontales et verticales varient à volonté : car il n'y aura point de diagonales à considérer ici. On écrira donc (*figure* A, *planche* XLVIII), et de suite 8 3 4, 1 5 9, 6 7 2. Alors le cercle (*figure* A') étant appliqué sur le précédent, et percé de trois ouvertures, comme on le voit à la figure B', donnera par son mouvement et successivement les sommes 8 1 6, 3 5 7, 4 9 2...1 6 8, 5 7 3, 9 2 4...6 8 1, 7 3 5, 2 4 9.

Si l'on fait attention à ces sommes toutes égales à 15, on verra que chacune se répète trois fois, ou un nombre de fois égal aux combinaisons réellement différentes de

trois nombres. En effet, *abc* ne peut donner que *abc*, *cab*, *bca*, où chaque lettre occupe successivement le milieu. Toute autre combinaison, comme *acb*, est la même que *bca* renversé. Maintenant, on peut mettre dans la couronne du milieu les nombres qui composent les verticales, en plaçant sous l'unité le nombre 3, qui tient le milieu du côté 8 3 4, et en suivant, 3 4 8, 5 9 1, et 7 2 6; puis, dans la couronne intérieure, sous 3, le nombre 2, et en suivant, 6 7; puis 4 8 3, et 9 1 5. Cette distribution est facile. La couronne extérieure aura 8 3 4, et le nombre suivant est 1. Sous ce nombre on met 3, qui est le second nombre, et ensuite 4 8, ce qui donne 3 4 8, où 4 tient le milieu; mais 3 étant le milieu de 8 3 4, les autres séries en suivant commenceront par le second nombre de ces séries, et seront 5 9 1, et 7 2 6. Quant à la couronne intérieure, sous 5 qui est dans la colonne de 6, on mettra 4, puis 8 3, pour que 8 soit au milieu, et par suite 9 1 5, et 2 6 7.

Ayant bien saisi ce qui précède, on pourra faire tourner le cercle percé en *abc*, comme on le voit (*figure* A'); enfin on peut réunir les deux cercles mobiles en un seul avec cinq ouvertures (*même figure*), ce qui donnera une horizontale et une verticale du carré, l'ouverture *a* étant commune aux deux lignes.

Il y aurait bien d'autres manières de distribuer le carré de 3 dans le cercle; nous verrons des exemples de ces distributions dans les carrés que nous allons examiner.

LE NOMBRE DONNÉ EST 25.

Soit le carré :

1	8	15	17	24
7	14	16	23	5
13	20	22	4	6
19	21	3	10	12
25	2	9	11	18

Pour garnir le cercle (*figure* B, *planche* XLVIII), on écrira de suite les verticales du carré dans la première couronne (nous désignerons les couronnes par ordre, en commençant par la plus extérieure); puis sous 1, et dans la même colonne, on peut écrire 5, qui est le 2.e nombre de la dernière verticale du carré; sous 5 on écrira 4, qui est le 3.e nombre de la verticale suivante; puis 3, qui est le 4.e de la verticale qui vient ensuite; enfin 2, qui est le dernier de la 2.e verticale : on observera que l'on va de droite à gauche, en commençant par un nombre toujours en diagonale par rapport au précédent. Ces nombres placés, toute la distribution se fait par ordre : ainsi, dans la seconde couronne après 5, on continue la dernière verticale de manière à employer tous les nombres, en reprenant le premier et les suivans lorsqu'on a placé le dernier nombre d'une verticale; on aura donc 5 6 12 18 24. On revient au 2.e nombre de la 1.re, puis à la 2.e verticale, et ainsi de suite, en commençant dans le même ordre, c'est-à-dire par le second nombre, comme on l'a pratiqué dans la 1.re série ci-dessus : donc on écrira 7 13 19 25 1; puis 14 20 21 2 8; et en continuant, 16 22 3 9 15; 23 4 10

11 17. La seconde couronne est remplie; la troisième, en partant de 4, sera 4 10 11 17 23; 6 12 18 24 5; 13 19 25 1 7; 20 21 2 8 14; 22 3 9 15 16. On voit comment on doit placer les nombres dans les couronnes restantes: il suffit donc de la première 1 5 4 3 2 pour remplir le cercle.

Maintenant, le cercle mobile sera percé de 5 en 5, comme on le voit (*figure* B'); si l'on perce un autre cercle en spirale aussi de 5 en 5, on aura les verticales du carré dont le premier cercle donnait les horizontales; enfin, un seul cercle à 9 ouvertures (*même figure* B') donnera verticale et horizontale, avec un nombre commun aux deux lignes. La distribution précédente est la même que pour le carré de 3.

Si l'on construit le cercle comme il est (*figure* B''), il y aura cela de remarquable, que l'on obtiendra les horizontales du carré soit au moyen du cercle mobile à cinq ouvertures extérieures à l'ordinaire, soit au moyen des ouvertures *a b c d e*, répondant à 1 20 17 10 et 11 de la couronne extérieure (*figure* B''').

LE NOMBRE DONNÉ EST 49.

Si l'on distribue le carré comme on voit (*figure* C), on aura ou le cercle mobile à sept ouvertures à la première couronne, ou le cercle à sept ouvertures sur une même ligne, ou le cercle composé des 13 ouvertures (*figure* C'), dont une est commune à une horizontale et à une verticale du carré.

LE NOMBRE DONNÉ EST 36.

Soit le carré de 6 :

7	26	27	10	29	12
6	35	3	4	32	31
21	20	16	15	17	19
13	14	22	21	23	18
36	5	34	33	2	1
25	11	9	28	8	30

Ayant écrit dans la première couronne (*figure* E) et par ordre les verticales du carré, qu'on place en diagonale circùlaire les mêmes verticales, et dans le même ordre, en complétant ces verticales comme on le voit à la figure: chacune sera répétée six fois de suite, et les ouvertures seront aussi disposées circulairement en diagonale (*fig.* E'), indépendamment des six ouvertures à la première couronne, qui donnent les horizontales du carré.

Enfin, que ce même carré de 6 soit inscrit dans la première couronne : on placera dans les autres les verticales du carré, savoir, un nombre des verticales dans chaque couronne, et arbitrairement pour la première verticale. Ici 7 est dans la 1.re couronne, 6 dans la 2.e, 24 dans la 3.e, 13 dans la 4.e, 36 dans la 5.e, enfin 25 dans la 5.e. En consultant la figure, on voit que les nombres de cette première verticale ont été mis à volonté dans chaque couronne. Ces premiers nombres placés, on mettra à la suite de chacun les cinq nombres par ordre qui complètent la 1.re verticale; puis on passera à la 2.e verticale, qui commence par 26, et l'on écrira dans la 2.e couronne les

nombres 35 20 14 5 11 26; dans la 3.e, les nombres 20 14 5 11 26 35, et ainsi des autres. On agira de même pour les autres verticales (*figure* D). Le cercle mobile aura, à l'ordinaire, six ouvertures pour les horizontales, et à la première couronne. Quant aux verticales, les ouvertures sont celles (*figure* D') où l'on en voit cinq très-irrégulièrement placées, et près les unes des autres; la 6.e est isolée.

Ces verticales se verront dans les ouvertures *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*.

Cette manière d'opérer est remarquable : car elle donne grand nombre de combinaisons.

Nous terminerons ici ce que nous voulions donner sur les cercles magiques provenant de carrés. Il y aurait à examiner ce qu'il y aurait à faire si les carrés étaient à bordures, à compartimens, etc.; mais cela nous mènerait trop loin. Il nous reste à faire voir que les parallélogrammes peuvent aussi servir à composer des cercles magiques. Ce sera l'objet de l'article suivant.

ARTICLE II.

LES NOMBRES SONT DES PARALLÉLOGRAMMES.

Nous avons dit, en traitant des parallélogrammes, que les deux facteurs devaient être pairs ou impairs tous les deux. Nous avons donné la manière d'obtenir les séries ne contenant point de nombres répétés. Nous allons examiner quelques parallélogrammes. Ce qui a été dit sur les cercles provenant de carrés nous dispense de répétitions inutiles.

LE NOMBRE DONNÉ EST 15.

C'est le plus petit nombre impair non carré composé de deux facteurs.

Soient les cinq groupes 15 8 1; 14 7 3; 13 6 5; 12 10 2; 11 9 4, chacun valant $24 = (\frac{15+1}{2})\frac{15}{5}$.

On peut composer les trois groupes de cinq nombres tirés des précédens, en prenant un nombre de chacun d'eux, de manière à obtenir 40 pour somme de chaque groupe, comme suit :

15	7	5	2	11
8	3	13	12	4
1	14	6	10	9

On distribuera par ordre dans le cercle (*planche* XLIX, *figure* F) les verticales du parallélogramme, et à fantaisie la première verticale dans les trois couronnes, comme on voit 15 8 1, et l'on répètera chaque verticale trois fois de suite, en reprenant le nombre supérieur lorsqu'on a placé l'inférieur. On agit de même pour les verticales suivantes. Alors le cercle mobile (*figure* F') donnera les horizontales du parallélogramme. On aura les verticales (*figure* F''); et, réunissant les deux figures en une seule (*figure* F'''), on aura une horizontale et une verticale *a*, *b*, *c*.

On voit qu'il est aussi facile de composer un cercle magique avec un parallélogramme qu'avec un carré. La seule difficulté est de former les horizontales du parallélogramme lorsqu'on a obtenu les verticales. Nous supposons toujours que les horizontales comprennent le plus grand facteur, et nous renvoyons, pour cette formation, à ce que nous avons dit en traitant des parallélogrammes.

LE NOMBRE DONNÉ EST 35.

Puisque $35 = 7 \cdot 5$, qu'on forme sept groupes de cinq nombres valant $90 = \frac{36 \cdot 35}{2 \cdot 7} = 18 \cdot 5$. On peut les obtenir par

1	7	18	29	35
2	6	19	30	33
3	5	24	28	32
4	8	21	23	34
9	10	13	27	31
11	12	16	25	26
14	15	17	20	22

Il faut prendre un nombre de chaque groupe pour en obtenir un de sept nombres valant $126 = \frac{36 \cdot 35}{2 \cdot 5} = 18 \cdot 7$, et agir de même pour les quatre autres groupes. On composera, par exemple, ces groupes comme suit :

1	33	32	23	10	12	15
7	19	24	21	27	11	17
18	30	3	8	31	16	20
29	2	5	34	9	25	22
35	6	28	4	13	26	14

Ayant placé dans la première couronne (*figure* G) les verticales par ordre, il suffira de distribuer à volonté la première verticale, en mettant un nombre dans chaque couronne; elle sera répétée cinq fois de suite, et l'on passera à la seconde, en agissant de même. On voit (*figure* G') les sept ouvertures de la première couronne, ce qui donne les horizontales, et les cinq ouvertures des verticales *a*, *b*, *c*, *d*, *e* pour les verticales, l'ouverture *a* étant commune.

Il n'est pas indispensable que les verticales soient placées par ordre dans la première couronne : on peut adopter pour la première verticale tout autre arrangement, et il détermine la manière de disposer les autres. *Ainsi* (*figure* H, *planche* XLIX) on a pris 7 29 18 1 35 pour cette première verticale, ce qui a nécessité 19 2 30 33 6 pour la seconde, et ainsi des autres. Il n'y a pas de motifs pour ne pas alterner les verticales à fantaisie, en suivant pour les nombres l'ordre adopté pour la première. De plus, les verticales étant placées dans la première couronne, on peut prendre, pour les verticales distribuées dans les cinq couronnes, un autre ordre que celui adopté pour ces mêmes verticales dans la première couronne. Ainsi, l'on a choisi l'ordre 7 18 35 29 1, qui sont les nombres de la première couronne de deux en deux. Cela donne le cercle mobile (*figure* H'), dans lequel les ouvertures *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, sont celles des verticales.

Si l'on a placé dans la première couronne les verticales, qui n'ont que cinq nombres, ou le plus petit facteur, on aurait pu également choisir les horizontales, qui ont sept nombres : ce n'est qu'un changement de position du parallélogramme. C'est ce qu'on verra (*figures* I *et* I').

Il faut ici sept couronnes au lieu de cinq. Comme on peut renverser l'ordre des horizontales et des verticales du parallélogramme, pourvu que ces lignes retiennent leurs nombres, il est également permis d'arranger à fantaisie les nombres de la première ligne placée dans la première couronne; les autres lignes suivent le mouvement de cette première; on a choisi l'arrangement suivant, en prenant 7 nombres pour les verticales :

3	32	5	28	24
31	10	9	13	27
8	23	34	4	21
18	1	29	35	7
20	15	22	14	17
30	33	2	6	19
16	12	25	26	11

Ayant placé par ordre ces verticales dans la 1.re couronne, on a distribué les nombres de ces verticales dans un ordre différent aux cases *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, ayant pris l'arrangement 3 18 16 20 31 8 30 pour la 1.re verticale. Ces 7 nombres, placés dans les 7 couronnes, ont déterminé les 6 suivans dans chacune, comme on le voit (*figure* I).

D'après ce qui précède, on peut juger du grand nombre de combinaisons que présentent les cercles magiques : car, composant autrement les groupes de 5 nombres, on tirera d'autres groupes de 7, et l'on fera subir à chaque système une foule de combinaisons. Il est clair que ce qui vient d'être dit pour le parallélogramme de 35 s'applique à tout autre composé de plus grands facteurs.

On va terminer par le parallélogramme de 60, qui est pair.

LE NOMBRE DONNÉ EST 60.

Soient faits les groupes de 6 comme suit : on remarquera symétrie dans cette composition.

60	59	58	1	2	3
57	56	55	4	5	6
54	53	52	7	8	9
51	50	49	10	11	12
48	47	46	13	14	15
45	44	43	16	17	18
42	41	40	19	20	21
39	38	37	22	23	24
36	35	34	25	26	27
33	32	31	28	29	30

On peut tirer de ces groupes de 6, ceux de 10, par exemple :

60	57	7	10	13	16	40	37	34	31
59	56	8	11	15	18	42	39	27	30
58	5	9	12	46	43	41	38	25	28
1	4	52	50	47	44	19	24	35	29
2	6	53	51	48	45	20	22	26	32
3	55	54	49	14	17	21	23	36	33

Chaque groupe de 6 vaut 183, et chaque groupe de 10 aura $305 = \frac{61}{2} \cdot 10$.

Ce sont ces derniers groupes de 6 et de 10 qui doivent entrer dans le cercle magique (*figures* K et K').

Il est très-facile de remplir le cercle : d'abord la 1.re couronne comprend les verticales, et aura 10 ouvertures, qui donneront les horizontales ; ensuite on placera où l'on voudra dans la 2.e couronne le 2.e nombre 57. Cela suffira pour remplir cette couronne : car, après avoir mis à la suite les uns des autres et par ordre les nombres 58 1 2 3 60 59, on placera le 2.e nombre de la 2.e verticale et les cinq suivans comme pour la 1.re verticale, et ainsi des autres. On

mettra ensuite à volonté dans la 3.e couronne le 3.e nombre de la 1.re verticale, 58, et l'on agira comme pour la 2.e; puis on mettra, toujours à fantaisie, le 4.e nombre de la 1.re verticale dans la 4.e couronne, et l'on continuera d'après ce procédé jusqu'à ce que le cercle soit rempli. On aura alors, d'après le choix que nous avons adopté (*fig.* K'), les verticales a, b, c, d, e, f.

Nous terminons ici ce que nous voulions dire sur les cercles magiques, et l'ouvrage déjà trop volumineux que nous avions entrepris. Nous n'avions pas dessein d'abord d'y comprendre ce qui concerne les parallélogrammes, les parallélipipèdes, la formule d'Euler, non plus que les cercles magiques; mais nous avons pensé que ces matières avaient une connexion trop étroite soit avec la théorie des carrés magiques, soit avec celle des cubes magiques, pour les passer sous silence. Nous n'avons pas voulu seulement exciter la curiosité, mais présenter de nouvelles combinaisons des nombres, combinaisons dont quelques-unes ne sont pas nouvelles, il est vrai, mais n'avaient été ni approfondies ni développées, et dont les autres n'avaient été traitées par personne. Si nos recherches intéressent le lecteur, si elles donnent lieu à des applications utiles, nous aurons atteint notre but.

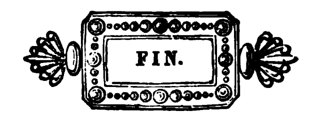


TABLE
DES MATIÈRES DU SECOND VOLUME.

TROISIÈME PARTIE.

VARIATIONS DES CARRÉS, CROIX, CHASSIS, CASES DÉTERMINÉES, FAUSSES BORDURES, ÉQUERRES, PROGRESSIONS GÉOMÉTRIQUES ET HARMONIQUES, PARALLÉLOGRAMMES, CUBES MAGIQUES, PARALLÉLIPIPÈDES, CERCLES MAGIQUES.

PREMIÈRE SECTION.

CHAPITRE PREMIER.

CHAPITRE II.

DEUXIÈME SECTION.

§ 6.

PREMIÈRE SECTION.

DEUXIÈME SECTION.

TROISIÈME SECTION.

Première Division.

Deuxième Division.

QUATRIÈME SECTION.

§ 7.

§ 8.

§ 9.

§ 10.

§ 11.

§ 12.

FIN DE LA TABLE.